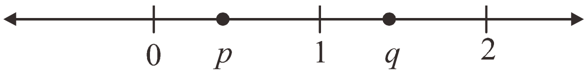
全國公私立高級中學 105 學年度指定科目
第七次聯合模擬考(數學甲)

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. 設 p、q 為實數，其在數線上的位置如圖所示。若已知 $0.1 < p < 0.5$ 且 $q = p+1$，則下列哪一個選項的數 x，滿足 $|x-1| > 1$？



(1) $x = 1.1p - 0.1q$
(2) $x = -0.1p + 1.1q$
(3) $x = \left(1-\sqrt{2}\right)p + \sqrt{2}q$
(4) $x = 0.1p + 0.9q$
(5) $x = -0.9p + 1.9q$。 【106 全國模(7)】

【全國高中 106 年(105 學年度)高三下第七次指考模擬考數學(自然組)試題(105-7)+詳解】

答：(5)

解：(1) $x = 1.1p - 0.1(p+1) = p - 0.1 \Rightarrow |p-1.1| < 1$

(2) $x = -0.1p + 1.1(p+1) = p + 1.1 \Rightarrow |p-0.1| < 1$

(3) $x = \left(1-\sqrt{2}\right)p + \sqrt{2}(p+1) = p + \sqrt{2} \Rightarrow \left|p+\sqrt{2}-1\right| < 1$

(4) $x = 0.1p + 0.9(p+1) = p + 0.9 \Rightarrow |p-0.1| < 1$

(5) $x = -0.9p + 1.9(p+1) = p + 1.9 \Rightarrow |p+0.9| > 1$

2. 平面上兩點 $A(-1,4)$、$B(3,2)$ 以及一直線 L：$y = mx$，m 為某實數。如果想要在直線 L 上找一點 P，使得 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$，那麼下列哪一個選項中的 m 值，<u>無法</u>使直線 $y = mx$ 上能找到這樣的 P 點？

(1) -3 (2) -2 (3) -1 (4) 1 (5) 2。 【106 全國模(7)】

【全國高中 106 年(105 學年度)高三下第七次指考模擬考數學(自然組)試題(105-7)+詳解】

答：(3)

解：$P(t, mt) \Rightarrow \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = (t+1, mt-4) \cdot (t-3, mt-2) = 0$

$\Rightarrow \left(m^2+1\right)t^2 + (-6m-2)t + 5 = 0$ 無實數解

判別式：$(-6m-2)^2 - 4 \times \left(m^2+1\right) \times 5 < 0 \Rightarrow (2m-1)(m+2) < 0 \Rightarrow -2 < m < \frac{1}{2}$

3. 設有一數列 $\langle a_n \rangle$ 的前 n 項和 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$，

則 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1 \cdot a_n}{S_n} = ?$

(1) 0 (2) $\frac{1}{4}$ (3) 4 (4) 1 (5)不存在。 【106 全國模(7)】

【全國高中 106 年(105 學年度)高三下第七次指考模擬考數學(自然組)試題(105-7)+詳解】

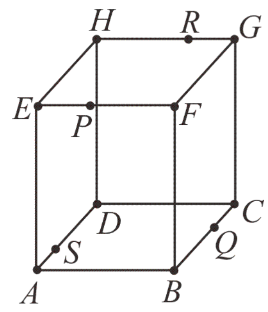
$\boxed{答}$：(4)

$\boxed{解}$：$a_1=S_1=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^0=\frac{1}{4}$，$a_n=S_n-S_{n-1}=\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$，$n\geq 2$

所求：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}}=1$

二、多選題

4. 如圖所示，正立方體 $ABCD-EFGH$，點 P、Q、R、S 分別在 $\overline{EF}$、$\overline{BC}$、$\overline{GH}$、$\overline{DA}$ 上，且 $\overline{EF}=3\overline{EP}$、$\overline{BC}=3\overline{QC}$、$\overline{GH}=3\overline{GR}$、$\overline{DA}=3\overline{SA}$，請選出正確的選項：



(1)四面體 $ACHF$ 的體積 > 四面體 $GDAB$ 的體積

（註：四面體的體積 $=\frac{1}{3}\times$底面積$\times$高）

(2)平面 $HEBC$ 截四面體 $GDAB$ 所成截面的面積 > 平面 $EFCD$ 截四面體 $GDAB$ 所成截面的面積

(3)平面 $ACGE$ 與平面 $BDHF$ 的夾角 = 直線 AG 與直線 CE 的夾角

(4)直線 PR 到直線 QS 的距離 > $\overline{AB}$ (5) $\cos\angle ERA>\frac{\sqrt{2}}{2}$。 【106 全國模(7)】

【全國高中 106 年(105 學年度)高三下第七次指考模擬考數學(自然組)試題(105-7)+詳解】

$\boxed{答}$：(1)(5)

$\boxed{解}$：(1) $D(0,0,0)$，$A(3,0,0)$，$C(0,3,0)$，$B(3,3,0)$

$H(0,0,3)$，$E(3,0,3)$，$G(0,3,3)$，$F(3,3,3)$

$P(3,1,3)$，$Q(1,3,0)$，$R(0,2,3)$，$S(2,0,0)$

$$ACHF\text{ 體積}=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}-3&3&0\\-3&0&3\\0&3&3\end{matrix}\right\|=9>GDAB=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}0&3&3\\3&0&0\\3&3&0\end{matrix}\right\|=\frac{9}{2}$$

(2)位置對稱，截面積相等 (3)平面夾角 90°，$\cos\theta=\left|\dfrac{\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{CE}}{|\overrightarrow{AG}||\overrightarrow{CE}|}\right|=\frac{1}{3}$，$\theta\neq 90^\circ$

(4) $d\left(\overline{PR},\overline{QS}\right)=\overline{AB}$ (5) $\cos\phi=\dfrac{\overrightarrow{RE}\cdot\overrightarrow{RA}}{|\overrightarrow{RE}||\overrightarrow{RA}|}=\sqrt{\frac{13}{22}}>\frac{\sqrt{2}}{2}$

5. 設平面上直線 L：$x+y=2$ 經過某二階矩陣變換後，所得圖形為直線 L'：$y=\sqrt{2}$。請選出符合條件的矩陣：

(1)$\begin{bmatrix}\cos 405° & -\sin 405° \\ \sin 405° & \cos 405°\end{bmatrix}$ (2)$\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}^3$ (3)$\begin{bmatrix}1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2}\end{bmatrix}$

(4)$\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}3 & 4 \\ 1 & 1\end{bmatrix}$ (5)$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2}\end{bmatrix}$。 【106 全國模(7)】

【全國高中 106 年(105 學年度)高三下第七次指考模擬考數學(自然組)試題(105-7)+詳解】

答：(1)(2)(4)

解：(1)$\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x \\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x' \\ y'\end{bmatrix}$代入 $x+y=2 \Rightarrow y'=\sqrt{2}$ 成立

(2)$\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x \\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x' \\ y'\end{bmatrix}$代入 $x+y=2 \Rightarrow y'=\sqrt{2}$ ，成立

(3)$\begin{bmatrix}1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x \\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x' \\ y'\end{bmatrix}$代入 $x+y=2 \Rightarrow x'+\sqrt{2}y'=2$ ，不合

(4)$\begin{bmatrix}\frac{3\sqrt{2}}{2} & \frac{4\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x \\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x' \\ y'\end{bmatrix}$代入 $x+y=2 \Rightarrow y'=\sqrt{2}$ ，成立

(5)$\begin{bmatrix}\frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x \\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x' \\ y'\end{bmatrix}$代入 $x+y=2 \Rightarrow$無解，不合

6. 設θ、k是實數，三元一次方程組$\begin{cases}\sqrt{3}\cos\theta x+y=0 \\ \sin\theta x+y-z=0 \\ (k+1)x+2z=0\end{cases}$解的個數會受到未知數$\theta$與$k$的影響，請選出正確的選項：

(1)存在θ與k使得方程組無解 (2)若$k<-6$，則方程組必有唯一解

(3)若方程組有異於$(0,0,0)$的解，則$-300\le k\le 300$

(4)若$k=3$，且方程組有無限多解，則$\theta=-\frac{\pi}{6}$

(5)若$\theta=\frac{\pi}{6}$，且方程組有無限多組解，則$k=1$。 【106 全國模(7)】

【全國高中 106 年(105 學年度)高三下第七次指考模擬考數學(自然組)試題(105-7)+詳解】

答：(2)(3)(5)

解：(1)至少有一解：$(0,0,0)$

$$(2)\ \Delta=\begin{vmatrix}\sqrt{3}\cos\theta & 1 & 0\\ \sin\theta & 1 & -1\\ k+1 & 0 & 2\end{vmatrix}=2\sqrt{3}\cos\theta-2\sin\theta-(k+1)$$

$$=4\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\right]-(k+1)=4\sin(60^\circ-\theta)-(k+1)$$

$\because -1\le\sin(60^\circ-\theta)\le 1$，$k<-6$ $\quad\therefore \Delta>1$，必恰一組解

(3)無限多解 $\Rightarrow \Delta=0\Rightarrow 4\sin(60^\circ-\theta)=k+1\Rightarrow -5\le k\le 3$

(4)無限多解且 $k=3\Rightarrow \sin(60^\circ-\theta)=1\Rightarrow \theta=-30^\circ+360^\circ k$

(5)無限多解且 $\theta=30^\circ\Rightarrow 2=k+1\Rightarrow k=1$

7. 設實係數三次多項式函數 $f(x)=ax^3-3x^2+cx+d$，在 $x=-2$ 以及 $x=1$ 處有極值，請選出正確的選項：

(1) $a<0$ (2) $c>0$ (3) $f(1)>f(-2)$ (4) $\dfrac{f(1)+f(-2)}{2}>f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

(5)若 $d<0$，則 $\int_{-2}^{1}f(x)dx<0$。 【106 全國模(7)】

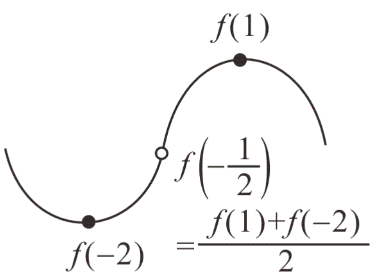
【全國高中 106 年(105 學年度)高三下第七次指考模擬考數學(自然組)試題(105-7)+詳解】

答：(1)(2)(3)(5)

解：$f'(x)=3ax^2-6x+c=3a(x+2)(x-1)\Rightarrow a=-2$，$c=12$

$f''(x)=6ax-6=-12\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$

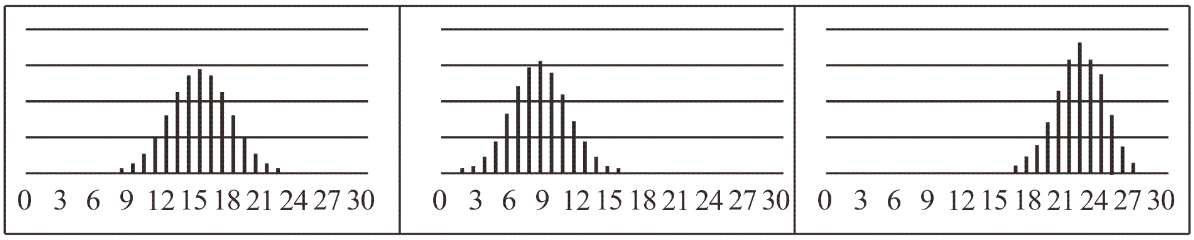
x		-2		$-\frac{1}{2}$		1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$f''(x)$	$+$		$+$	0	$-$		$-$
$f(x)$							



$$\int_{-2}^{1}f(x)dx=\left[-\frac{1}{2}x^4-x^3+6x^2+dx\right]_{-2}^{1}=3d-\frac{39}{2}$$

8. 設有金、銀、銅硬幣各一枚，且擲出正面的機率分別為 p_x、p_y、p_z。如圖，是以三個不同硬幣擲出正面的次數 X、Y、Z 為隨機變數，各擲30次所對應之機率質量函數圖。圖中的橫軸坐標表示擲出正面的次數，刻度 0，1，2，3，……，29，30（包括未顯示

出者）皆有向上的矩形長條，長度對應機率大小，每一橫線機率值間隔 0.05，從 0 到 0.2。



(a) X 的機率質量函數圖　(b) Y 的機率質量函數圖　(c) Z 的機率質量函數圖

已知 X、Y、Z 的期望值與變異數分別為 $E(X)$、$E(Y)$、$E(Z)$ 與 $Var(X)$、$Var(Y)$、$Var(Z)$，請選出正確的選項：

(1) $p_x < p_y < p_z$　(2) $E(X) > E(Y) > E(Z)$　(3) $Var(X) > Var(Y) > Var(Z)$

(4) $Var(Z) = Var(30 - Z)$

(5)圖中，各機率質量函數圖矩形長條之長度總和，以圖(c)為最大。　【106 全國模(7)】

【全國高中 106 年(105 學年度)高三下第七次指考模擬考數學(自然組)試題(105-7)+詳解】

答：(3)(4)

解：(1) $p_x \fallingdotseq 0.5$，$p_y \fallingdotseq 0.3$，$p_z \fallingdotseq 0.8$

(2) $E(X) = 30 \times p_x \fallingdotseq 15$，$E(Y) = 30 \times p_y \fallingdotseq 9$，$E(Z) = 30 \times p_z \fallingdotseq 24$

(3) $Var(X) = 30\,p_x\left(1 - p_x\right) \fallingdotseq 7.5$，$Var(Y) = 30\,p_y\left(1 - p_y\right) \fallingdotseq 6.3$

$Var(Z) = 30\,p_z\left(1 - p_z\right) \fallingdotseq 4.8$

(4) $Var(30 - Z) = Var(-Z) = Var(Z)$

(5)三圖應相等

三、選填題

A. 已知指數函數 $f(x) = 1.3^x$ 與對數函數 $g(x) = \log_{1.3} x$ 兩者的圖形，相交於點 $A\left(x_1, y_1\right)$ 以及點 $B\left(x_2, y_2\right)$，求 $\log_{x_1} 1.3^{3x_2} \cdot \log_{x_2} \dfrac{1}{1.3^{x_1}} =$ ________。　【106 全國模(7)】

【全國高中 106 年(105 學年度)高三下第七次指考模擬考數學(自然組)試題(105-7)+詳解】

答：-3

解：$x_1 = y_1 = t$，$x_2 = y_2 = s$，且 $1.3^t = t$，$1.3^s = s$

所求：$\log_t 1.3^{3s} \times \log_s 1.3^{-t} = \log_t s^3 \times \log_s t^{-1} = -3$

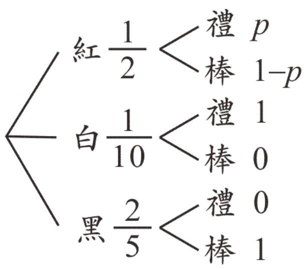
B. 某單位想要調查大眾對一新法規的瞭解比例，為了吸引民眾參與調查，設計了一無人的智慧機器裝置，其中設有模擬抽球遊戲，並在機器螢幕上廣告邀請民眾踴躍參加：「參加者模擬抽球如果抽到紅球，須回答對此法規的相關問題，回答正確，機器會送出一份禮券，若回答不正確，會送出一支棒棒糖；如果抽到白球，可直接得到禮券；如果抽到

黑球，直接得到一支棒棒糖。」若一人限玩一次，機器模擬抽到紅球、白球、黑球的機率依序為$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{10}$、$\frac{2}{5}$，且最後主辦單位統計共發出480份禮券以及620支棒棒糖，則在參與的民眾回答了新法規相關問題的條件下，回答正確的機率為________。（化為最簡分數）【106全國模(7)】

【全國高中106年(105學年度)高三下第七次指考模擬考數學(自然組)試題(105-7)+詳解】

答：$\frac{37}{55}$

解：



則$\frac{480}{1100}=\frac{1}{2}\times p+\frac{1}{10}\times 1+\frac{2}{5}\times 0$

或$\frac{600}{1100}=\frac{1}{2}(1-p)+\frac{1}{10}\times 0+\frac{2}{5}\times 1$

$\Rightarrow p=\frac{37}{55}$

C. 設空間中兩點$A(a,0,-1)$、$B(4,b,7)$分別在平面E：$x-y+2z=3$上的投影點P、Q所成向量$\overrightarrow{PQ}=(1,1,c)$，則數組$(a,b,c)=$________。【106全國模(7)】

【全國高中106年(105學年度)高三下第七次指考模擬考數學(自然組)試題(105-7)+詳解】

答：$(-1,-3,0)$

解：$\overrightarrow{E}=(1,-1,2)\perp\overrightarrow{PQ}=(1,1,c)\Rightarrow c=0$

又$t\overrightarrow{E}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AB}\Rightarrow\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{PQ}\right)=t\overrightarrow{E}$

$\Rightarrow(4-a-1,b-0-1,7+1-0)=t(1,-1,2)\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\b=-3\end{cases}$

第貳部分：非選擇題

1. 直角坐標平面上，設正 ΔABC 之重心為 $O(0,0)$，頂點坐標為 $A(3,y)$，
且滿足 $(3+yi)^3=-117-44i$，$i=\sqrt{-1}$，試求：
(1) $y=$？
(2)若頂點 B 在第一象限，則頂點 C 的坐標為何？
(3)若正 ΔABC 的外接圓在 B、C 兩點處的切線之交點為 P，則點 P 的坐標為何？
【106 全國模(7)】
【全國高中 106 年(105 學年度)高三下第七次指考模擬考數學(自然組)試題(105-7)+詳解】

答：(1) -4 (2) $C\left(\dfrac{-3-4\sqrt{3}}{2},\dfrac{4-3\sqrt{3}}{2}\right)$ (3) $P(-6,8)$

解：(1) $(3+yi)^3=125\left[\dfrac{-117}{125}+\dfrac{-44}{125}i\right]\Rightarrow|3+yi|=5\Rightarrow y=\pm4$

但 $(3+4i)^3=-117+44i$，$(3-4i)^3=-117-44i\Rightarrow y=-4$

(2) $(3-4i)(\cos120°+i\sin120°)=\dfrac{-3+4\sqrt{3}}{2}+\dfrac{4+3\sqrt{3}}{2}i\cdots\cdots B$

$(3-4i)(\cos(-120°)+i\sin(-120°))=\dfrac{-3-4\sqrt{3}}{2}+\dfrac{4-3\sqrt{3}}{2}i\cdots\cdots C$

(3)外接圓 $x^2+y^2=25$，極線 $3x-4y=\dfrac{-25}{2}$，即 $-6x+8y=25$。故 $P(-6,8)$

2. (1)若不等式 $-t^2+3t-2\ge0$ 的解之範圍為 $a\le t\le b$，則數對 $(a,b)=$？
(2)承(1)，設 $a\le t\le b$，若二次函數 $f(x)=x^2+\left(t^2-3t+2\right)x$ 與 x 軸所圍之封閉區域為 R，則區域 R 的面積 $A(t)$ 為何？
(3)承(2)，試求 $A(t)$ 的最大值，以及此時的 t 值為何？ 【106 全國模(7)】
【全國高中 106 年(105 學年度)高三下第七次指考模擬考數學(自然組)試題(105-7)+詳解】

答：(1) $(1,2)$ (2) $A(t)=-\dfrac{1}{6}(t-1)^3(t-2)^3$ (3) $t=\dfrac{3}{2}$ 時，$Max=\dfrac{1}{384}$

解：(1)原式：$t^2-3t+2\le0\Rightarrow(t-1)(t-2)\le0\Rightarrow1\le t\le2$

(2)承(1)，$A(t)=\int_0^{-\left(t^2-3t+2\right)}[-f(x)]dx$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}\left(t^2-3t+2\right)x^2\right]_0^{-\left(t^2-3t+2\right)}$$

$$=-\frac{1}{6}\left(t^2-3t+2\right)^3=-\frac{1}{6}(t-1)^3(t-2)^3$$

(3) $A'(t)=-\dfrac{1}{6}\left[3(t-1)^2(t-2)^3+(t-1)^3\times3(t-2)^2\right]$

$$=\frac{-1}{2}(t-1)^2(t-2)^2[2t-3]$$

t		1		$\frac{3}{2}$		2	
$A'(t)$	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$
$A(t)$	$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$

$$Max\ :\ A\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{-1}{2}\right)^3=\frac{1}{384}$$