

# 全國公立高級中學 105 學年度指定科目 第七次聯合模擬考(數學甲)



RA679

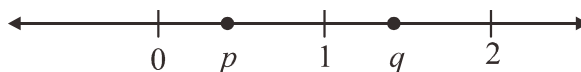
## 第壹部分：選擇題

### 一、單選題

1. 設  $p$ 、 $q$  為實數，其在數線上的位置如圖所示。若已知  $0.1 < p < 0.5$  且  $q = p + 1$ ，

則下列哪一個選項的數  $x$ ，滿足  $|x - 1| > 1$ ？

- (1)  $x = 1.1p - 0.1q$       (2)  $x = -0.1p + 1.1q$   
 (3)  $x = (1 - \sqrt{2})p + \sqrt{2}q$       (4)  $x = 0.1p + 0.9q$   
 (5)  $x = -0.9p + 1.9q$ 。



2. 平面上兩點  $A(-1, 4)$ 、 $B(3, 2)$  以及一直線  $L: y = mx$ ， $m$  為某實數。

如果要在直線  $L$  上找一點  $P$ ，使得  $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$ ，那麼下列哪一個選項中的  $m$  值，無法使直線  $y = mx$  上能找到這樣的  $P$  點？

- (1) -3    (2) -2    (3) -1    (4) 1    (5) 2。

3. 設有一數列  $\langle a_n \rangle$  的前  $n$  項和  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{1}{4} \left( -\frac{1}{3} \right)^{n-1}$ ，

則  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 \cdot a_n}{S_n} = ?$  (1) 0    (2)  $\frac{1}{4}$     (3) 4    (4) 1    (5) 不存在。

### 二、多選題

4. 如圖所示，正立方體  $ABCD - EFGH$ ，點  $P$ 、 $Q$ 、 $R$ 、 $S$  分別在  $\overline{EF}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{GH}$ 、 $\overline{DA}$  上，且  $\overline{EF} = 3\overline{EP}$ 、 $\overline{BC} = 3\overline{QC}$ 、 $\overline{GH} = 3\overline{GR}$ 、 $\overline{DA} = 3\overline{SA}$ ，請選出正確的選項：

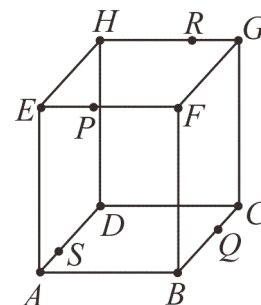
- (1) 四面體  $ACHF$  的體積  $>$  四面體  $GDAB$  的體積

(註：四面體的體積  $= \frac{1}{3} \times \text{底面積} \times \text{高}$ )

- (2) 平面  $HEBC$  截四面體  $GDAB$  所成截面的面積  $>$  平面  $EFCD$  截四面體  $GDAB$  所成截面的面積

- (3) 平面  $ACGE$  與平面  $BDHF$  的夾角 = 直線  $AG$  與直線  $CE$  的夾角

- (4) 直線  $PR$  到直線  $QS$  的距離  $>$   $\overline{AB}$     (5)  $\cos \angle ERA > \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。



5. 設平面上直線  $L: x + y = 2$  經過某二階矩陣變換後，所得圖形為直線  $L': y = \sqrt{2}$ 。請選出符合條件的矩陣：

(1)  $\begin{bmatrix} \cos 405^\circ & -\sin 405^\circ \\ \sin 405^\circ & \cos 405^\circ \end{bmatrix}$     (2)  $\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}^3$     (3)  $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

(4)  $\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$     (5)  $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ 。

6. 設  $\theta$ 、 $k$  是實數，三元一次方程組 
$$\begin{cases} \sqrt{3} \cos \theta x + y = 0 \\ \sin \theta x + y - z = 0 \\ (k+1)x + 2z = 0 \end{cases}$$
 解的個數會受到未知數  $\theta$  與  $k$  的影響，請選出正確的選項：

響，請選出正確的選項：

(1) 存在  $\theta$  與  $k$  使得方程組無解 (2) 若  $k < -6$ ，則方程組必有唯一解

(3) 若方程組有異於  $(0, 0, 0)$  的解，則  $-300 \leq k \leq 300$

(4) 若  $k = 3$ ，且方程組有無限多解，則  $\theta = -\frac{\pi}{6}$

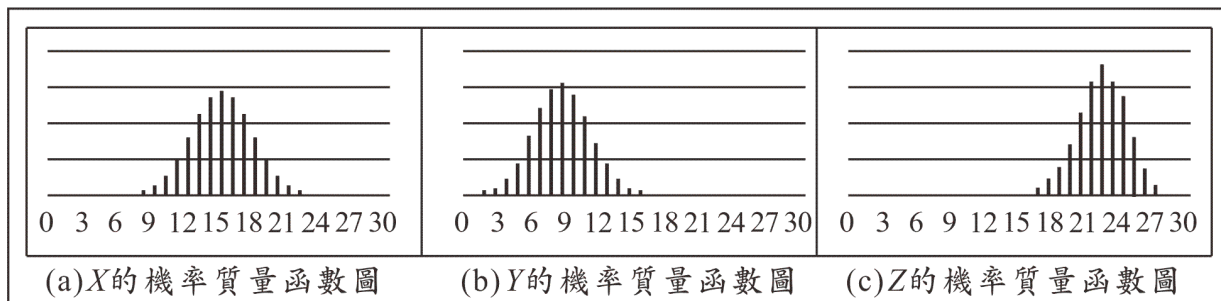
(5) 若  $\theta = \frac{\pi}{6}$ ，且方程組有無限多組解，則  $k = 1$ 。

7. 設實係數三次多項式函數  $f(x) = ax^3 - 3x^2 + cx + d$ ，在  $x = -2$  以及  $x = 1$  處有極值，請選出正確的選項：

(1)  $a < 0$  (2)  $c > 0$  (3)  $f(1) > f(-2)$  (4)  $\frac{f(1) + f(-2)}{2} > f\left(-\frac{1}{2}\right)$

(5) 若  $d < 0$ ，則  $\int_{-2}^1 f(x) dx < 0$ 。

8. 設有金、銀、銅硬幣各一枚，且擲出正面的機率分別為  $p_x$ 、 $p_y$ 、 $p_z$ 。如圖，是以三個不同硬幣擲出正面的次數  $X$ 、 $Y$ 、 $Z$  為隨機變數，各擲 30 次所對應之機率質量函數圖。圖中的橫軸坐標表示擲出正面的次數，刻度 0, 1, 2, 3, …, 29, 30 (包括未顯示出者) 皆有向上的矩形長條，長度對應機率大小，每一橫線機率值間隔 0.05，從 0 到 0.2。



已知  $X$ 、 $Y$ 、 $Z$  的期望值與變異數分別為  $E(X)$ 、 $E(Y)$ 、 $E(Z)$  與  $Var(X)$ 、 $Var(Y)$ 、 $Var(Z)$ ，請選出正確的選項：

(1)  $p_x < p_y < p_z$  (2)  $E(X) > E(Y) > E(Z)$  (3)  $Var(X) > Var(Y) > Var(Z)$

(4)  $Var(Z) = Var(30 - Z)$

(5) 圖中，各機率質量函數圖矩形長條之長度總和，以圖(c)為最大。

### 三、選填題

A. 已知指數函數  $f(x) = 1.3^x$  與對數函數  $g(x) = \log_{1.3} x$  兩者的圖形，相交於點  $A(x_1, y_1)$

以及點  $B(x_2, y_2)$ ，求  $\log_{x_1} 1.3^{3x_2} \cdot \log_{x_2} \frac{1}{1.3^{x_1}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

- B. 某單位想要調查大眾對一新法規的瞭解比例，為了吸引民眾參與調查，設計了一無人的智慧機器裝置，其中設有模擬抽球遊戲，並在機器螢幕上廣告邀請民眾踴躍參加：「參加者模擬抽球如果抽到紅球，須回答對此法規的相關問題，回答正確，機器會送出一份禮券，若回答不正確，會送出一支棒棒糖；如果抽到白球，可直接得到禮券；如果抽到黑球，直接得到一支棒棒糖。」若一人限玩一次，機器模擬抽到紅球、白球、黑球的機率依序為  $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{10}$ 、 $\frac{2}{5}$ ，且最後主辦單位統計共發出 480 份禮券以及 620 支棒棒糖，則在參與的民眾回答了新法規相關問題的條件下，回答正確的機率為\_\_\_\_\_。  
(化為最簡分數)

- C. 設空間中兩點  $A(a, 0, -1)$ 、 $B(4, b, 7)$  分別在平面  $E: x - y + 2z = 3$  上的投影點  $P$ 、 $Q$  所成向量  $\overrightarrow{PQ} = (1, 1, c)$ ，則數組  $(a, b, c) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

### 第貳部分：非選擇題

- 一、 直角坐標平面上，設正  $\triangle ABC$  之重心為  $O(0, 0)$ ，頂點坐標為  $A(3, y)$ ，且滿足  $(3 + yi)^3 = -117 - 44i$ ， $i = \sqrt{-1}$ ，試求：
- (1)  $y = ?$
  - (2) 若頂點  $B$  在第一象限，則頂點  $C$  的坐標為何？
  - (3) 若正  $\triangle ABC$  的外接圓在  $B$ 、 $C$  兩點處的切線之交點為  $P$ ，則點  $P$  的坐標為何？

- 二、(1) 若不等式  $-t^2 + 3t - 2 \geq 0$  的解之範圍為  $a \leq t \leq b$ ，則數對  $(a, b) = ?$
- (2) 承(1)，設  $a \leq t \leq b$ ，若二次函數  $f(x) = x^2 + (t^2 - 3t + 2)x$  與  $x$  軸所圍之封閉區域為  $R$ ，則區域  $R$  的面積  $A(t)$  為何？
- (3) 承(2)，試求  $A(t)$  的最大值，以及此時的  $t$  值為何？

RA679 全國公私立高級中學 105 學年度指定科目第七次聯合模擬考  
(數學甲) 參考答案

第壹部分：選擇題

1. (5) 2. (3) 3. (4) 4. (1)(5) 5. (1)(2)(4) 6. (2)(3)(5) 7. (1)(2)(3)(5) 8. (3)(4)

選填題

- A. -3 B.  $\frac{37}{55}$  C. (-1, -3, 0)

第貳部分：非選擇題

一、(1) -4 (2)  $C\left(\frac{-3-4\sqrt{3}}{2}, \frac{4-3\sqrt{3}}{2}\right)$  (3)  $P(-6, 8)$

二、(1) (1, 2) (2)  $A(t) = -\frac{1}{6}(t-1)^3(t-2)^3$  (3)  $t = \frac{3}{2}$  時,  $Max = \frac{1}{384}$