



第六次聯合模擬考(數學甲)

第壹部分：選擇題(佔 76 分)

一、 單選題(占 24 分)

- 1.( ) 空間直角坐標系中有  $A(3, -5, 1)$ 、 $B(7, 2, 3)$  兩點，則下列哪一個選項中的點可與  $A$ 、 $B$  決定唯一的平面？  
 (1)  $P(-9, -26, -5)$  (2)  $Q(-5, -19, -3)$  (3)  $R(-1, -12, -1)$  (4)  $S(11, 9, 5)$  (5)  $T(15, 16, 8)$
- 2.( ) 有一公正骰子，其六面的點數分別為  $1$ 、 $2$ 、 $3$ 、 $4$ 、 $5$ 、 $x$ 。設隨機變數  $X$  為投擲骰子一次所得的點數，則下列哪一個選項的  $x$  值，會使隨機變數  $X$  之標準差最小？  
 (1)  $x=1$  (2)  $x=2$  (3)  $x=3$  (4)  $x=4$  (5)  $x=5$
- 3.( ) 平面上有一正六邊形  $ABCDEF$ ，則下列哪一個選項之值最大？  
 (1)  $|\vec{AB} + \vec{AC}|$  (2)  $|\vec{AB} + \vec{AE}|$  (3)  $|\vec{AB} + \vec{AF}|$  (4)  $|\vec{AC} + \vec{AD}|$  (5)  $|\vec{AC} + \vec{AE}|$
- 4.( ) 在空間直角坐標系中有一點  $A(3, 4, 5)$ 。 $xy$  平面上有一圓  $C$ ，其圓心為原點  $O$ 、半徑為  $\sqrt{2}$ ， $P$  為圓  $C$  上的點且向量  $\vec{OA}$  與  $\vec{OP}$  所圍三角形面積為整數，則這樣的  $P$  點有多少個？  
 (1) 4 (2) 6 (3) 8 (4) 10 (5) 12

二、 多選題(占 24 分)

- 5.( ) 若  $A(a)$ 、 $B(b)$  為實數線上兩點，且  $a$ 、 $b$  滿足下列大小關係  $a - b > a + b > ab > \frac{a}{b}$ ，則下列哪些選項必正確？  
 (1)  $b > 0$  (2)  $a < 0$  (3)  $a > 0$  (4)  $(1-a)(1-b) < 1$  (5)  $-1 < b < 0$
- 6.( ) 平面直角坐標系中有一點  $P(4, 3)$ ，有三個矩陣  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 、 $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ 、 $C = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ， $A$ 、 $B$ 、 $C$  分別將  $P$  點變換至  $Q$  點、 $R$  點、 $S$  點，則下列哪些選項正確？  
 (1)  $\overline{PQ} = 6$  (2)  $B$  矩陣為平面直角坐標系中繞著原點逆時針旋轉  $\frac{\pi}{3}$  之變換矩陣  
 (3) 若  $n$  為自然數且  $B^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，則  $n$  被 6 所整除  
 (4)  $C$  矩陣為平面直角坐標系中對稱直線  $y = -\sqrt{3}x$  之變換矩陣 (5)  $\overline{PQ} > \overline{PS} > \overline{PR}$
- 7.( ) 若  $f(x)$  為領導係數為 1 之三次實係數多項式、 $g(x)$  為次數小於等於二次之實係數多項式。若  $y = f(x)$  與  $y = g(x)$  圖形皆通過  $(1, a)$ 、 $(0, 0)$ 、 $(-1, b)$ ，則下列哪些選項正確？  
 (1)  $f(x)$  中  $x^2$  項係數為  $\frac{a+b}{2}$  (2) 若  $a+b=0$ ，則  $y = g(x)$  圖形為一直線

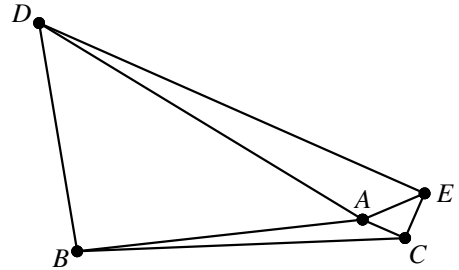
(3)  $g(x) = \frac{a}{2}x(x+1) - \frac{b}{2}x(x-1)$  (4)若  $a+b=0$ ，則  $y=f(x)$  的圖形可能與  $x$  軸相交三相異點

(5)若  $a+b=0$ ，則  $y=f(x)$  的圖形可能與  $x$  軸相交二相異點

三、選填題(占 28 分)

A. 有一實數  $a$  滿足  $\log(a^2 + 6a - 1) = \log a^2 + \log 6a - \log 1$ ，則  $a$  所有可能值之和為\_\_\_\_\_。  
(化為最簡分數)

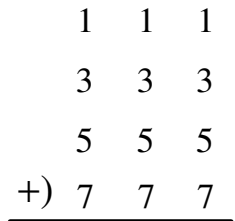
B. 如圖(1)，平面上有一  $\triangle ABC$ ，其中  $\overline{AB} = 5$ 、 $\overline{AC} = 1$ 、 $\overline{BC} = \sqrt{34}$ ， $\triangle ABD$ 、 $\triangle ACE$  皆為等腰直角三角形，且  $\angle ABD = \frac{\pi}{2}$ 、 $\angle ACE = \frac{\pi}{2}$ ，則  $\overline{DE} =$ \_\_\_\_\_。



圖(1)

C. 在平面直角坐標系中，有一圓  $C: x^2 + y^2 = 144$ ，其圓心為  $O$ ；一直線  $L: 4x - 3y - 75 = 0$ 。直線  $L$  上有一動點  $P$ ，過  $P$  作圓  $C$  之兩切線，分別切於  $Q$ 、 $R$  兩點。當  $P$  之坐標為  $(a, b)$  時，四邊形  $PQOR$  的面積有最小值  $m$ ，則  $a+b+m$  之值為\_\_\_\_\_。

D. 圖(2)為 4 個三位數的直式加法，任取 12 個數字中的 6 個數字將其改成 0 (改完後的數可以不是三位數，例如：改完可為 011、000)，使得直式和為 1111 之機率為\_\_\_\_\_。(化為最簡分數)



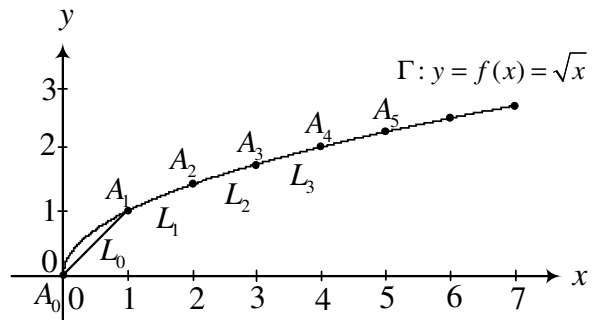
圖(2)

第貳部分：非選擇題(佔 24 分)

一、如圖(3)，在平面直角坐標系中有一圖形  $\Gamma: y = f(x) = \sqrt{x}$ ，若在  $\Gamma$  上取點  $A_n(n, f(n))$ ，其中  $n$  為非負整數。令  $L_n$  為  $\overline{A_n A_{n+1}}$  的長度，則：

(1)請證明： $L_n > L_{n+1}$ 。(6 分)

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n$  之值為何？(6 分)



圖(3)

二、方程式  $x^5 - 1 = 0$  的根為  $x_k = \cos \frac{2k\pi}{5} + i \sin \frac{2k\pi}{5}$ ，其中  $k = 0, 1, 2, 3, 4$ ，則：

(1)  $x^5 - 1 = (x-1)(x^2 - \alpha x + 1)(x^2 + \beta x + 1)$ ，其中  $\alpha > 0$ 、 $\beta > 0$ ，則數對  $(\alpha, \beta) = ?$  (4 分)

(2)  $x^2 - \alpha x + 1 = (x - x_i)(x - x_j)$ ，其中  $0 \leq i < j \leq 4$ ，則數對  $(i, j) = ?$  (4 分)

(3)利用(2)求  $\cos \frac{2\pi}{5} = ?$  (4 分)

RA5101 全國公私立高級中學 105 學年度指定科目

第六次聯合模擬考(數學甲) 參考答案

第壹部分：選擇題

1.(5) 2.(3) 3.(4) 4.(2) 5.(3)(4)(5) 6.(1)(3) 7.(1)(2)(4)

選填題

A.  $\frac{7}{6}$  B. 8 C. 111 D.  $\frac{1}{462}$

第貳部分：非選擇題

一、(1)略 (2)1

二、(1)  $(\alpha, \beta) = \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$  (2)  $(i, j) = (1, 4)$  (3)  $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$