全國公私立高級中學 105 學年度指定科目
第五次聯合模擬考(數學甲)

RA5100

第壹部分：選擇題(佔 76 分)

一、 單選題(占 24 分)

1.(　　) 若一元二次方程式 $f(x)=(2a+1)x^2-ax+(1-2a)=0$ 的兩個實根分別在區間$(1,2)$和區間 $(-1,0)$ 內，則 a 值的所有可能範圍為何？
(1) $-\frac{5}{4}<a<\frac{1}{2}$　(2) $-\frac{5}{4}<a<2$　(3) $a>2$ 或 $a<-2$　(4) $\frac{1}{2}<a<2$　(5) $-2<a<-\frac{5}{4}$

2.(　　) 若空間中四條兩兩不同的直線 L_1、L_2、L_3、L_4，滿足 $L_1\perp L_2$，$L_2 // L_3$，$L_3\perp L_4$。請選出一定<u>不可能</u>成立的選項。(1) $L_1\perp L_4$　(2) $L_1 // L_4$　(3) L_1、L_4 既不垂直也不平行
(4) L_1、L_3 既不相交也不平行　(5) $L_2 // L_4$

3.(　　) 若 $x=a$ 為 $(\frac{1}{2})^x=\log_{\frac{1}{2}}x$ 的實數解，設 $f(x)=|x-\log_{\frac{1}{3}}(a+1)x|+|x-\log_{\frac{1}{2}}(a+1)|+|x-\log_{\frac{1}{2}}2|$ 的最小值為 m，請選出正確的選項。
(1) $m=f(-1)$　(2) $m>\log_{\frac{1}{2}}(a+1)+1$　(3) $m>\log_{\frac{1}{3}}(a+1)+1$　(4) $m<0$　(5) $m>3$

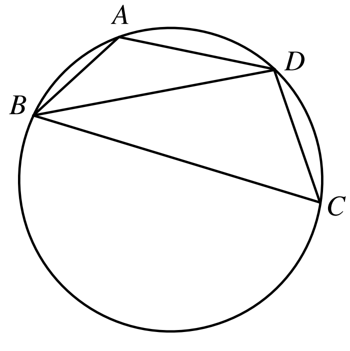
4.(　　) 考慮一次方程組 $M\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=N\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$，其中 $M=\begin{bmatrix}2t-1 & -1\\t+10 & -t+2\end{bmatrix}$，$N=\begin{bmatrix}t-1 & -2\\t+3 & t+3\end{bmatrix}$，$t$ 為實數，則使此方程式之 x、y 有解的所有可能 t 值範圍為何？
(1) $t=-1$ 或 4　(2) $t=-3$ 或 -1　(3) $t\in\{-3,-1,4\}$
(4) $t\in R$ 但 $t\neq -1$ 且 $t\neq 4$　(5) $t\in R$ 但 $t\notin\{-3,-1,4\}$

二、 多選題(占 24 分)

5.(　　) 已知 L 為坐標平面上不通過原點的直線，設 $A(a_1,b_1)$，$B(a_2,b_2)$ 為直線 L 上相異兩點，請選出正確的選項。(1)存在 A、B 使方程組 $\begin{cases}a_1x+b_1y=1\\a_2x+b_2y=2\end{cases}$ 無解
(2)無論 A、B 是任意兩相異點，方程組 $\begin{cases}a_1x+b_1y=1\\a_2x+b_2y=2\end{cases}$ 必恰有唯一解
(3)若 L 改為通過原點但不平行兩坐標軸的直線，其餘條件不變，則存在 A、B 使方程組 $\begin{cases}a_1x+b_1y=1\\a_2x+b_2y=2\end{cases}$ 恰有唯一解　(4)存在 A、B 使方程組 $\begin{cases}a_1x+y=b_1\\a_2x+2y=b_2\end{cases}$ 有無限多組解
(5) 存在 A、B 使方程組 $\begin{cases}a_1x+y=b_1\\a_2x+2y=b_2\end{cases}$ 無解

6.(　　) 坐標平面上，已知 $A(1,\cos\theta)$、$B(1-\cos\theta,\sin\theta-\cos\theta)$、$C(\sin\theta+2,1+2\cos\theta)$ 三點共線，且 B 點不在 x 軸上，其中 $0\le\theta\le 2\pi$，請選出 θ 可能值的正確選項。
(1)0　(2) $\frac{\pi}{4}$　(3) $\frac{5\pi}{4}$　(4) $\frac{3\pi}{2}$　(5) $\frac{7\pi}{4}$

7.(　　) 如圖(1)，圓內接四邊形 $ABCD$ 中，已知 $\overline{BD}=4$，$\overline{BC}=2\sqrt{5}$，$\overline{CD}=2$ 且 $\sin(\angle ADC)=\frac{\sqrt{19}}{8}$。請選出正確的選項。



圖(1)

(1) $\cos(\angle BDC)=1$　(2) $\cos(\angle ADC)=\dfrac{3\sqrt{5}}{8}$　(3) $ABCD$ 外接圓面積大於 15

(4) $\sin(\angle BAD)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$　(5) $\overline{AB}=\dfrac{15}{4}$

三、選填題(占 28 分)

A. 平面 E 過 $L_1:\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-3}{2}$ 與 $L_2:\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y+14}{3}=\dfrac{z-1}{1}$ 的交點 G，且 G 點恰為平面 E 分別在 x、y、z 軸上的三個截點所成之三角形的重心，求平面 E 之方程式為____________。

B. $x,y\in R$，若 $2(|x-1|+|x+1|)+(|y-1|+|y+1|)\le 6$，則 $x+y$ 之值所在的區間範圍為________________。

C. 在坐標平面上，已知 O 是坐標原點，動點 M 在圓 $K:(x-4\sqrt{2})^2+(y-4\sqrt{2})^2=16$ 上，其中 C 點為圓心。已知平面上另兩動點 P 和 Q，滿足 $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{0}$，則 $|\overrightarrow{PQ}|$ 的最大值為_____________。

D. 若 p、q 皆為負整數，且多項式 x^4+px^3+qx+4 恰有兩個相異的整係數一次因式，則 $(p,q)=$____________。

第貳部分：非選擇題(佔 24 分)

一、爸爸透過遊戲方式決定兩兄弟每週零用錢的金額，兄弟兩人一組，拿到的零用錢再平分，「每玩一次」遊戲規則如下：

兄弟兩人手上各有一個袋子，哥哥的袋中有 2 紅球 1 白球，弟弟的袋中有 1 紅球 1 白球 1 黑球。先由哥哥隨機從自己的袋子中一次任取 2 球放入弟弟的袋中，弟弟再從自己的袋中一次任取 3 球。若拿到三個完全同色的球，爸爸就給他們 1200 元再平分；若拿到三個完全異色的球，就給他們 900 元再平分；若其他情況就給他們 600 元再平分。設隨機變數 X 是每玩一次遊戲後爸爸給他們的零用錢金額(兄弟的總和)，且每週遊戲結果是獨立事件。(1) 試求 X 的期望值。(7 分)

(2) 試求連續三週，恰好兩週拿到 900 元的機率。(2 分)

(3) 已知連續兩週兄弟總共得 1800 元，則兩週都拿到 900 元的機率為何？(3 分)

二、已知函數 $f(x)=(k+4\sin^2 x)\cos(2x+\theta)$ 為奇函數，且 $f(\dfrac{3\pi}{4})=0$，其中 $k\in R$，$-2\pi<\theta<-\pi$。

(1) 求 k,θ 的值。(5 分)

(2) 若 $-\pi<\alpha<\pi$，$f(\dfrac{\alpha}{8})=\dfrac{3}{5}$，求 $\sin(\alpha-\dfrac{\pi}{6})$ 的值。(7 分)

RA5100 全國公私立高級中學 105 學年度指定科目
第五次聯合模擬考(數學甲)　參考答案

第壹部分：選擇題

1.(3)　**2.**(5)　**3.**(2)　**4.**(4)　**5.**(2)(5)　**6.**(1)(4)　**7.**(3)(5)

選填題

A. $10x-5y+2z=30$　**B.** $[-2,2]$　**C.** 26　**D.** $(-4,-1)$

第貳部分：非選擇題

一、(1)730 元　(2) $\dfrac{2299}{9000}$　(3) $\dfrac{121}{157}$

二、(1) $k=-2,\theta=-\dfrac{3\pi}{2}$　(2) $\dfrac{24\sqrt{3}-7}{50}$