全國高級中學 105 學年度第 1 學期第四次學科能力測驗

RA481

第壹部分：選擇題(佔 60 分)

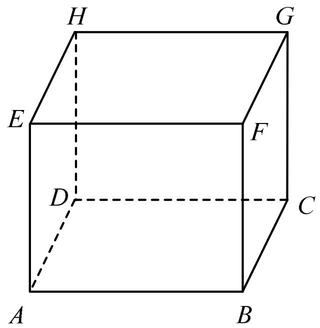
一、 單選題(占 30 分)

1.(　　) 阿明老師帶著全班 34 個同學參觀美術館(含老師共計 35 人)。已知美術館門票一張 100 元，而且，如果一次買 20 張可以打 9 折，一次買 30 張可以打 8 折，一次買 40 張可以打 7 折。請問阿明老師至少要付多少費用，才可以讓全班(含老師)都進去參觀？
(1) 3500 元　(2) 3300 元　(3) 2900 元　(4) 2800 元　(5) 2600 元

2.(　　) 已知「引擎馬力 P(Horsepower)」的計算公式是 $P=\frac{1}{75}|\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{v}|$，

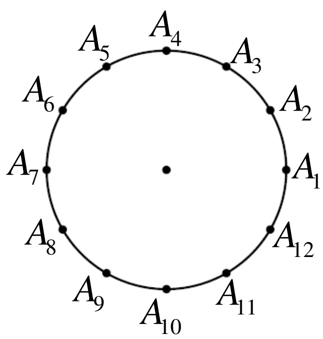
其中 $\overrightarrow{F}$ 是引擎所拉動之物體的重量，單位是公斤，$\overrightarrow{v}$ 是引擎拉動之物體的速度，單位是公尺/秒。已知日月潭纜車有一引擎拉動軌道上重 1000 公斤的纜車廂，而纜車與水平線的夾角約是 37°，纜車廂的速度是 5 公尺/秒，則此引擎約為多少馬力？
(已知 $\sin 37^\circ=\frac{3}{5}$)
(1) 30 馬力　(2) 40 馬力　(3) 50 馬力　(4) 60 馬力　(5) 70 馬力

3.(　　) 已知 $ABCD\text{-}EFGH$ 為空間中的一個正六面體，則下列哪一個選項的值最大？



(1) $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AB}|$　(2) $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$　(3) $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|$
(4) $|\overrightarrow{CE}\times\overrightarrow{AB}|$　(5) $|\overrightarrow{EB}\times\overrightarrow{EG}|$

4.(　　) 已知一圓周上有 12 個等分點，從這 12 個等分點中，任意選 4 個等分點作為頂點構成一個四邊形，試問此四邊形為梯形的機率為何？



(1) $\frac{21}{55}$　(2) $\frac{56}{165}$　(3) $\frac{14}{55}$
(4) $\frac{8}{33}$　(5) $\frac{12}{55}$

5.(　　) 已知平面上三點 $A(6,2)$、$B(0,-1)$、$C(8,-5)$，阿明想要在 $\overline{AB}$ 與 $\overline{BC}$ 上分別取 D、E 兩點使得直線 DE 可以平分△ABC 的面積。已知阿明選取的 D 點的坐標為 $D(4,1)$，則直線 DE 的斜率應為多少？
(1) $-\frac{5}{2}$　(2) $-\frac{7}{3}$　(3) $-\frac{9}{4}$　(4) $-\frac{14}{5}$　(5) $-\frac{7}{6}$

6.(　　) 阿明老師的班上有 30 位同學，因同學於運動會期間為班級榮譽團結一致，老師特別製作 30 張彩券進行摸彩，以作為給同學的獎勵。已知其中 10 張有獎，其餘 20 張沒有獎，試問下列敘述哪一個選項正確？
(1) 「班花」阿美吵著第一個抽，她認為第一個中獎的機會最大

(2) 承(1)，在阿美沒抽中的情況下，接著「班長」阿勇第二個抽，他心中暗喜，因為他認為中獎的機會提高了
(3) 承(2)，在阿勇抽中的情況下，第三個抽的「康樂」阿幸心想：第一個沒中，第二個中了，互相抵消，所以我的中獎機率跟阿美抽的時候相同
(4) 承(3)，在阿幸沒抽中的情況下，第四個抽的「學藝」阿智，掐指一算，大聲說：現在我的中獎機率比阿勇抽的時候還要高
(5) 小瓜被排在最後一個抽，他向老師抗議不公平，因為他認為最後一個抽的人，一定是抽到沒有獎的彩券

二、 多選題(占 30 分)

7.(　　) 已知 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 為實係數三次多項式，則下列敘述哪些正確？
(1) 集合 $\{x \mid x<1, 2<x<3, x\in R\}$，可能為不等式 $f(x)<0$ 之解
(2) 集合 $\{x \mid x>1, x\neq 2, x\in R\}$，可能為不等式 $f(x)>0$ 之解
(3) 集合 $\{x \mid x<3, x\neq 1, x\in R\}$，可能為不等式 $f(x)<0$ 之解
(4) 集合 $\{x \mid 1<x<3, x\neq 2, x\in R\}$，可能為不等式 $f(x)>0$ 之解
(5) 不等式 $f(x)<0$ 之解可能為所有的實數

8.(　　) 所謂圓錐曲線的「標準式」是指當圓錐曲線的對稱軸平行或垂直坐標平面上坐標軸的條件下所得的方程式。當下列選項中的訊息作為已知條件時，哪些可以在坐標平面上求出相關圓錐曲線的標準式？
(1) 已知橢圓的兩個頂點及一個焦點的坐標
(2) 已知雙曲線的兩個焦點及圖形上一個點的坐標
(3) 已知拋物線的準線方程式及頂點的坐標
(4) 已知橢圓的三個頂點
(5) 已知雙曲線的兩條漸近線方程式

9.(　　) 阿明教授的生物實驗室內有一個容器正在培養 A、B 兩種細菌，並且在任何時刻下 A、B 兩種細菌的個數乘積必須保持為一定值的平衡狀態，已知該定值為 10^{12}。假設 n_A 表示 A 細菌的個數，n_B 表示 B 細菌的個數，$L_A=\log n_A$，$L_B=\log n_B$，試問下列選項哪些正確？
(1) $1\le L_A\le 12$　　(2) 當 $L_A=6$ 時，A 與 B 兩種菌個數相同
(3) 若今天的 L_A 值比昨天增加 1，表示今天的 A 細菌個數是昨天的 2 倍
(4) 若星期一測得 L_A 值為 4 且星期三測得 L_A 值為 8，則可得星期二的 L_A 值為 6
(5) 若阿明教授將 A 細菌個數控制在 300 萬個，則此時 $5.5\le L_B\le 6$

10.(　　) 已知有一個六個面的點數分別為 1、2、3、4、5、6 的公正骰子，投擲此骰子 5 次，紀錄每次投擲所出現的點數，依序為 a、b、c、d、e，則下列敘述哪些正確？
(1) 符合 $a<b<c<d<e$ 的情形總共有 6 種
(2) 符合 $a\le b\le c\le d\le e$ 的情形總共有 252 種
(3) 符合 $a<b<c<d\le e$ 的情形總共有 21 種
(4) a、b、c、d、e 最大為 3 的情形有 211 種
(5) a、b、c、d、e 最小為 2 且最大為 5 的情形有 620 種

11.(　　) 已知空間中有平面E: $x-y+z-1=0$ 與直線L: $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{-2}$，則下列敘述哪些正確？

(1) 直線L與平面E的交點為$(2,0,-1)$　　(2) 直線L與平面E垂直

(3) 平面$y+z+1=0$包含直線L且與平面E垂直

(4) 平面E和xy平面所夾的銳角大於45°

(5) 平面E與三坐標軸所圍成的四面體體積為$\frac{1}{6}$

12.(　　) 設a，b，c為實數，下列有關線性方程組$\begin{cases} x+y+az=1 \\ x+2y+bz=-1 \\ 2x+3y-z=c \end{cases}$的敘述哪些正確？

(1) 若此線性方程組有解，則可能恰有一組解或有無窮多組解

(2) 若此線性方程組有唯一解，則$a+b\neq -1$

(3) 若此線性方程組有解，則$c=0$

(4) 若此線性方程組無解，則$c\neq 0$

(5) 若此線性方程組無解，則$a+b=-1$

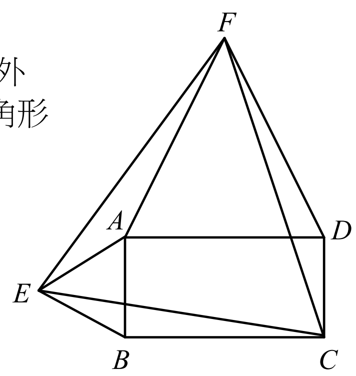
第貳部分：選填題(占 40 分)

A. 二階方陣$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} k & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$，若$(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$，則實數$k$=________。

B. 已知竹苗中學有一橢圓形的操場，其跑道的形狀符合橢圓形方程式$\frac{(x-3)^2}{900}+\frac{(y-1)^2}{1600}=1$。(單位：公尺)，且一短軸頂點上有一直立旗桿。某日數學老師阿明在此操場跑道慢跑，他發現在操場某長軸頂點上測得旗桿頂的仰角為 30 度，試問旗桿的高度為________公尺。(化為最簡根式)

C. 若$f(x)$為五次多項式，且$f(x)$除以$(x+1)$的餘式為 152，除以$(x-2)$的餘式為 5，除以$(x-1)^4$的餘式為 8，試求$f(3)$=____________。

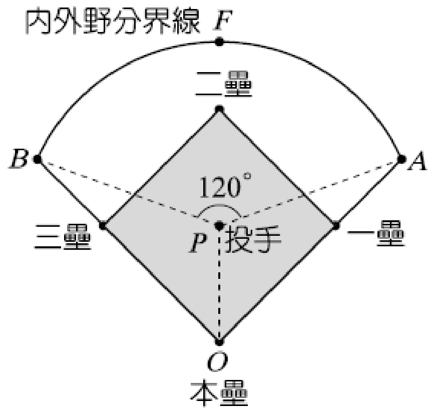
D. 右圖為平面上的一個圖形，已知$ABCD$為矩形，分別自兩個邊向外做正三角形ADF及AEB。若矩形$ABCD$、正三角形ADF及正三角形AEB三者的面積和為a，三角形ECF的面積為b，且$a=b+16$。試求矩形$ABCD$的面積為________。



E. 設標準位置角$\theta=\dfrac{\pi}{12}\times 180^{\circ}+45^{\circ}$，其中 n 為整數且$60\le n\le 120$，則有＿＿＿＿個θ會落在第三象限內。

F. 已知一數列：$\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{5},\dfrac{4}{5},\dfrac{1}{7},\dfrac{4}{7},\dfrac{9}{7},\dfrac{1}{9},\dfrac{4}{9},\dfrac{9}{9},\dfrac{16}{9},\dfrac{1}{11},\dfrac{4}{11},\dfrac{9}{11},\dfrac{16}{11},\dfrac{25}{11},\cdots\cdots,$ 依此規律，試求此數列的前 45 項和為＿＿＿＿。

G. 假設大巨蛋棒球場的內野設計如右圖所示，此棒球場地的內外野分界線為一圓弧$\overset{\frown}{AB}$，此圓弧的圓心為 P(投手的位置)，圓弧$\overset{\frown}{AB}$的中點為 F。若已知本壘所在的位置 O 點到圓弧$\overset{\frown}{AB}$兩端點 A、B 之距離均為$100\sqrt{2}$呎，O 點到圓弧$\overset{\frown}{AB}$的中點 F 之距離為$95\sqrt{3}$呎，且$\angle AOB=90^{\circ}$，$\angle APB=120^{\circ}$。試求投手 P 至本壘 O 的距離$\overline{PO}$=＿＿＿＿呎。(化為最簡根式)



H. 已知在一個與變化量 x、y 有關的線性規劃作業中，有三個限制條件。在坐標平面上畫出符合這三個限制條件的區域,最後得到的可行解區域是一個三角形ABC及其內部區域(包含邊界)，已知$A(3,3)$，$B(5,-7)$，$C(\alpha,\beta)$。在此可行解區域中，當目標函數為$f(x,y)=x+2y$時，得到在 A 點有最大值，在 B 點有最小值。現因環境條件改變的需要，加入了第四個限制條件$ax+by\le c$，結果符合所有限制條件的可行解區域變成一個四邊形區域，頂點少了$A(3,3)$，但新增了頂點$D(1,1)$，$E(4,-2)$。若已知滿足上述條件的$C(\alpha,\beta)$，其中α可能的最小範圍為$m\le\alpha<n$，m、n 為整數。
請問數對(m, n)=＿＿＿＿。

RA481 全國高級中學 105 學年度第 1 學期第四次學科能力測驗
參考答案

第壹部分：選擇題

1.(4) **2.**(2) **3.**(5) **4.**(4) **5.**(1) **6.**(2) **7.**(1)(2)(3) **8.**(1)(2)(3)(4)
9.(2)(5) **10.**(1)(2)(3)(4) **11.**(1)(3)(4)(5) **12.**(1)(2)

第貳部分：選填題

A. -2 **B.** $\frac{50\sqrt{3}}{3}$ **C.** -104 **D.** 64 **E.** 13 **F.** 55 **G.** $\frac{85\sqrt{3}}{3}$ **H.** $(-3,1)$