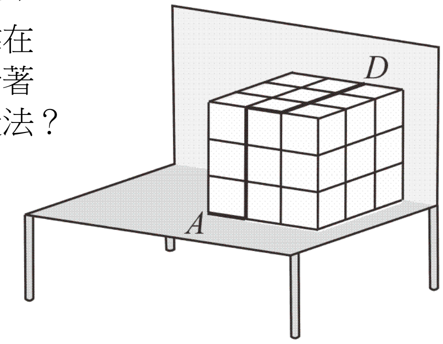
北區高中 106 年(105 學年度)
高三上第二次學測模擬考數學試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. 右圖是一顆3×3的魔術方塊，也就是在一個正立方體中，每一面均有九個大小相等的正方形。現將其中一面緊靠在牆面，並靜置在桌面上（如圖所示），試求一隻螞蟻沿著分格線或稜線，從A點走捷徑到B點，有幾種不同的走法？（舉例說明：圖中粗線即為滿足條件之一條路徑。）



(1) 28種
(2) 56種
(3) 74 種
(4) 110 種
(5) 138種。

【106 北模(2)】

答：(3)

解：排容原理：$\underbrace{\dfrac{8!}{2!6!}}_{\text{正面}\to\text{上面}}+\underbrace{\dfrac{8!}{3!5!}}_{\text{正面}\to\text{上面}}-\underbrace{1\times\dfrac{5!}{2!3!}}_{\text{交界稜線}\to\text{上面}}=28+56-10=74$

2. 若$f(x,y)=(x-1)^2+(y+1)^2+(x-2y+1)^2$，試求此函數的最小值為下列何者？
(1)$\dfrac{10}{3}$ (2)$\dfrac{8}{3}$ (3)1 (4)2 (5)3。

【106 北模(2)】

答：(2)

解：柯西不等式

$$\left[(x-1)^2+(y+1)^2+(x-2y+1)^2\right]\left[(-1)^2+2^2+1^2\right]\ge[-x+1+2y+2+x-2y+1]^2$$

$$\Rightarrow(x-1)^2+(y+1)^2+(x-2y+1)^2\ge\frac{4^2}{6}=\frac{8}{3}$$

3. 坐標平面上有一個正六邊形，其頂點以順時針方向依序為$ABCDEF$。
已知F點的坐標為$(0,5)$，O點為原點，且A、B皆在x軸上，則$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AO}=$？
(1)5 (2)$5\sqrt{3}$ (3)$\dfrac{25}{3}$ (4)$\dfrac{25}{3}\sqrt{3}$ (5)25。

【106 北模(2)】

答：(3)

解：$\overline{AF}\cdot\overline{AO}=\left|\overline{AO}\right|^2=\left(\dfrac{5}{\sqrt{3}}\right)^2=\dfrac{25}{3}$

4. 已知一圓C：$(x-1)^2+(y-2)^2=10$，平面上一點$A(4,2)$，直線L通過A點且與x軸正向的交角為$60°$，若直線L與圓C交於P、Q兩點，求$\overline{AP}\times\overline{AQ}=$？
(1)$\dfrac{1}{4}$ (2)$\dfrac{1}{2}$ (3)1 (4)$\dfrac{3}{2}$ (5)$\dfrac{5}{4}$。

【106 北模(2)】

答：(3)

解：$A(4,2)$在圓$(x-1)^2+(y-2)^2=\left(\sqrt{10}\right)^2$的內部，其中圓心$O(1,2)$、半徑$r=\sqrt{10}$

由「內冪性質」得知：$\overline{AP}\times\overline{AQ}=\left(r+\overline{AO}\right)\left(r-\overline{AO}\right)=\left(\sqrt{10}+3\right)\left(\sqrt{10}-3\right)=1$

5. 考慮矩陣$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$，其中$a$、$b$、$c$為實數且行列式值$\det(A)=\dfrac{1}{2}$，

求$\det\left(A-A^{-1}\right)=$？

(1)$\dfrac{1}{8}$　(2)$\dfrac{1}{4}$　(3)$\dfrac{1}{2}$　(4)$\dfrac{9}{2}$　(5)$\dfrac{9}{4}$。【106 北模(2)】

答：(4)

解：$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$，$\det A=\dfrac{1}{2}$，則$A^{-1}=\begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\times 2$，

故$A-A^{-1}=\begin{bmatrix} 3a & 3b \\ 3c & -3a \end{bmatrix}=3A\Rightarrow\det\left(A-A^{-1}\right)=\det(3A)=3^2\det A=\dfrac{9}{2}$

二、多選題

6. 設$f(x)$為一實係數四次多項式，$i=\sqrt{-1}$，

已知$f(i+1)=0$且不等式$f(x)<0$的解為$-2<x<3$，則下列選項哪些是正確的？

(1)$f(i-1)=0$　(2)若a、b為任意實數，且$f(a+bi)=2$，則$f(a-bi)=-2$

(3)不等式$f(2x)>0$的解為$x<-1$或$x>\dfrac{3}{2}$　(4)$y=f(x)$的圖形與x軸交於相異兩點

(5)$y=(x+2)f(x)$的圖形與x軸有三個交點。【106 北模(2)】

答：(3)(4)

解：(1)$f(x)=m(x-1-i)(x-1+i)(x+2)(x-3)$，其中$m>0$。故$f(i-1)\neq 0$

(2)$f(a+bi)=2$，則$f(a-bi)=2$

(3)(4)正確

(5)$y=m(x-1-i)(x-1+i)(x+2)^2(x-3)$的圖形與$x$軸有二個交點。

7. 已知自然數a、b滿足$\log_3 a=20$且$\log_3 b=16$，則下列選項哪些是正確的？

(1)自然數$a+b$必為41之倍數　(2)自然數a的個位數字與b相同

(3)自然數$a+b$為9位正整數　(4)自然數$a+b$展開後之末兩位數字為22

(5)若定義實數$A=n+\alpha$，其中n為整數且$0\le\alpha<1$，則稱α為實數A之小數部分，

由此定義得$\log_3\left(a^4+b^5\right)$之小數部分與$\log_3 162$之小數部分相等。【106 北模(2)】

答：(1)(2)(4)(5)

解：(1)$a+b=3^{20}+3^{16}=3^{16}(81+1)=3^{16}\times 41\times 2$，成立

(2)$a=3^{20}$、$b=3^{16}$的個位數字均為1

(3)$\log(a+b)=\log 3^{16}\times 41\times 2\approx 16\times 0.4771+1.6020+0.3010\approx 9.5366$，表 10 位數

(4)$a+b=81^4\times 82=(80+1)^4\times(80+2)=\left(100K+C_3^4\times 80+C_4^4\right)(80+2)$

$=(100M+21)(80+2)=100N+1680+42=100Q+22$

(4) $a+b=6561^2\times82=\left(6500^2+2\times6500+61^2\right)\times(80+2)=(100K+21)(80+2)$

$=100N+1680+42=100Q+22$

(4) $a=9^{10}=(10-1)^{10}=100M-C_9^{10}\times10+1=100N+1$

$b=9^8=(10-1)^8=100K-C_7^8\times10+1=100L+21$（餘數必為正數）

$a+b=100Q+22$

(5) $\log_3\left(a^4+b^5\right)=\log_3\left(3^{80}+3^{80}\right)=\log_3\left(3^{80}\times2\right)=80+\underbrace{[\log_3 2]}_{\text{小數部分}}$

$\log_3 162=\log_3\left(3^4\times2\right)=4+\underbrace{[\log_3 2]}_{\text{小數部分}}$

8. 阿松申辦提款卡時，依銀行規定須自訂4個阿拉伯數字排成一組密碼。某天阿松欲提款時發現他忘了正確密碼，只記得是由奇數1，3，5，7，9中取出相異四個數字排列而成，現若依此隨機輸入號碼，試問下列選項哪些是正確的？

(1)他第一次就猜對的機率為$\dfrac{1}{120}$

(2)提款機設定當輸入的密碼錯誤達三次時，會沒收該提款卡，阿松嘗試輸入不同密碼，則他的提款會被沒收的機率為$\dfrac{39}{40}$

承上述條件，若有一種智慧型提款機，每次輸入數字後會給提示，提示的口訣為「$mAnB$」，其中mA表示輸入的數字當中有m個不但中了而且數字是在正確的位置，nB表示輸入的數字當中有n個中了但是數字的位置不正確。例如：密碼為7135，若輸入3159，則提示為「$1A2B$」。假使能善用提示，試問下列選項哪些是正確的？

(3)在第一次輸入就猜到「$1A3B$」的機率為$\dfrac{1}{15}$

(4)他在第一次猜到「$1A3B$」的條件下，第二次猜到「$4A0B$」的機率為$\dfrac{1}{8}$

(5)他在第一次猜到「$1A3B$」且在第二次猜到「$4A0B$」的機率為$\dfrac{1}{120}$。【106北模(2)】

答：(1)(2)(3)(4)(5)

解：(1)機率為$\dfrac{1}{5!}=\dfrac{1}{120}$　(2)機率為$\dfrac{119}{120}\times\dfrac{118}{119}\times\dfrac{117}{118}=\dfrac{39}{40}$

(3) $P(\text{第一次}1A3B)=\dfrac{C_1^4\,(1\times3!-3\times2!+3\times1!-1\times0!)}{120}=\dfrac{4\times2}{120}=\dfrac{1}{15}$

(4) $P(\text{第二次}4A0B\,|\,\text{第一次}1A3B)=\dfrac{1}{C_1^4\,(1\times3!-3\times2!+3\times1!-1\times0!)}=\dfrac{1}{8}$

(5) $P(\text{第一次}1A3B\cap\text{第二次}4A0B)$

$=P(\text{第一次}1A3B)\times P(\text{第二次}4A0B\,|\,\text{第一次}1A3B)=\dfrac{1}{15}\times\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{120}$

9. 若變數 X (身高)的算術平均數為 μ_x，標準差為 σ_x；
而變數 Y (體重)的算術平均數為 μ_y，標準差為 σ_y；
且變數 X 與變數 Y 的相關係數為 r_{xy}，而 Y 對 X 的最佳迴歸直線為 $y=a+bx$。
現將變數做線性轉換 $P=-2X+1$，$Q=Y-3$，則下列選項哪些是正確的？
(1)變數 P 的算術平均數 $\mu_P=-2\mu_x+1$　(2)變數 P 的標準差 $\sigma_p=-2\sigma_x$
(3)變數 P 與變數 Q 的相關係數 $r_{pq}=-r_{xy}$
(4) Q 對 P 的迴歸直線方程式必過點 $\left(-2\mu_x+1,\mu_y-3\right)$
(5) Q 對 P 的迴歸直線方程式的斜率為 $-\dfrac{b}{2}$。【106 北模(2)】

$\boxed{答}$：(1)(3)(4)(5)
$\boxed{解}$：(2)變數 P 的標準差 $\sigma_p=2\sigma_x$

10. 若空間中向量 $\overrightarrow{a}=(1,2,-2)$、$\overrightarrow{b}=(2,m,n)$、$\overrightarrow{c}=(2,-1,0)$，滿足 $|\overrightarrow{b}|=3\sqrt{5}$ 且 $\left(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right)\cdot\overrightarrow{c}=45$，則下列選項哪些是正確的？
(1) $\left(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right)/\!/\overrightarrow{c}$　(2) $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}$　(3) $m=4$　(4) $n=5$　(5) $\left(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{c}\right)+\overrightarrow{b}=\overrightarrow{0}$。【106 北模(2)】

$\boxed{答}$：(1)(2)(3)(4)(5)

$\boxed{解}$：$\left(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right)\cdot\overrightarrow{c}=\left|\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}\right|=\begin{vmatrix}1&2&-2\\2&m&n\\2&-1&0\end{vmatrix}=45\Rightarrow 4m+5n=41$

$|\overrightarrow{b}|=\sqrt{4+m^2+m^2}=3\sqrt{5}\Rightarrow m^2+n^2=41$
故 $m=4,n=5$，則 $\overrightarrow{a}=(1,2,-2)$、$\overrightarrow{b}=(2,4,5)$、$\overrightarrow{c}=(2,-1,0)$，
而 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=(18,-9,0)$、$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{c}=(-2,-4,-5)$

11. 已知空間中三點 $A(2,2,1)$、$B(1,3,-1)$、$C(1,1,-1)$，若在空間中與 A、B、C 三點等距離的所有點所形成的圖形為 Γ，則下列選項哪些是正確的？
(1) Γ：$x-y+2z+1=0$　(2) Γ：$\begin{cases}x=1-2t\\y=2\\z=t\end{cases}$，$t\in R$
(3) Γ 中最接近原點的點為 $\left(\dfrac{1}{5},2,\dfrac{2}{5}\right)$　(4) Γ 中與原點最接近的距離為 $\sqrt{\dfrac{21}{5}}$
(5) ΔABC 的面積為 $\sqrt{5}$。【106 北模(2)】

$\boxed{答}$：(2)(3)(4)(5)
$\boxed{解}$：(1)(2) $\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2+(z+1)^2}$
$=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(z+1)^2}$
$\Rightarrow -4x-4y-2z+9=-2x-6y+2z+11=-2x-2y+2z+3$

$$\Rightarrow\begin{cases}2x-2y+4z+2=0\\-4y+8=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1-2t\\y=2\\z=t\end{cases}，t\in R$$

(3)(4) $\sqrt{(1-2t)^2+2^2+t^2}=\sqrt{5t^2-4t+5}=\sqrt{5\left(t-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{21}{5}}$

當 $t=\frac{2}{5}$，亦即點為 $\left(\frac{1}{5},2,\frac{2}{5}\right)$ 時，與原點最接近距離為 $\sqrt{\frac{21}{5}}$

(5) $\overline{AB}=(-1,1,-2)$、$\overline{AC}=(-1,-1,-2)$，ΔABC 的面積為 $\frac{1}{2}\sqrt{6\times6-4^2}=\sqrt{5}$

12. 設 A、B、C 為矩陣，I 為單位方陣。下列有關矩陣的敘述哪些是正確的？
(1)若 $AB=BA$，則矩陣 A、B 皆為方陣　(2)若 $AC=BC$，且 $\det(C)\neq0$，則 $A=B$
(3)若 $A^2=I$，則 $A=I$ 或 $A=-I$　(4)若 $AB=BA$，則 $AB^{10}=B^5AB^5=B^{10}A$
(5)若 AB 有乘法反元素，則 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$。【106 北模(2)】

答：(1)(2)(4)

解：(1) $A_{m\times n}B_{n\times p}=C_{m\times p}=B_{n\times p}A_{m\times n}=D_{n\times n}\Rightarrow p=m=n$

(2) $\det(C)\neq0$，表 C^{-1} 存在

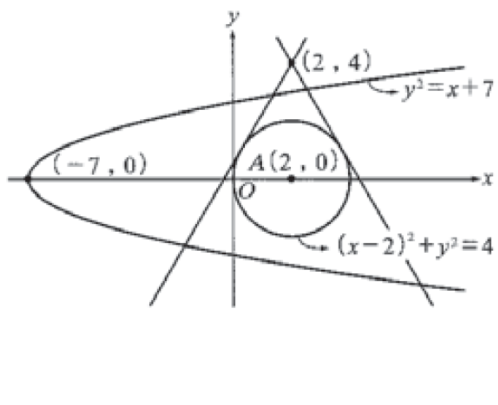
(3)反例：$A=\begin{bmatrix}\cos2\theta & \sin2\theta\\ \sin2\theta & -\cos2\theta\end{bmatrix}$

(4)交換律成立

(5)必須 A、B 均為方陣才成立

13. 若方程式 $\left(x^2+y^2-4x\right)\left(y^2-x-7\right)=0$ 之圖形與直線 L：$mx-y+4-2m=0$ 有四個相異的交點，請問符合的 m 值可能為下列哪些？
(1) -2　(2) -1　(3) 0　(4) 1　(5) 2。【106 北模(2)】

答：(1)(5)



解：C：$x^2+y^2-4x=0\Rightarrow(x-2)^2+y^2=4$

表圓心 $(2,0)$，半徑為 2 的圓

Γ：$y^2-x-7=0\Rightarrow y^2=4\left(\frac{1}{4}\right)(x+7)$

表頂點 $(-7,0)$，焦距 $\frac{1}{4}$ 的向右開口拋物線

L：$mx-y+4-2m=0\Rightarrow(y-4)=m(x-2)$

表過點 $(2,4)$，斜率為 m 的直線

當 L 與 C 相切時，$\frac{|2m-0+4-2m|}{\sqrt{m^2+1}}=2\Rightarrow m=\pm\sqrt{3}$

故當 $m>\sqrt{3}$ 或 $m<-\sqrt{3}$ 時，有四個交點

第貳部分：選填題

A. 若有一群人，任意取完2本相同書籍的方法數超過1000種，試問這一群人至少有________個人。【106 北模(2)】

答：45

解：$H^n_2=C^{n+1}_2=\dfrac{(n+1)n}{2}>1000\Rightarrow n>44.\cdots$，$n$ 取 45

B. 已知a為整數，若平面上三直線L_1：$x+2y=a+2$，L_2：$2x+3y=-a-4$，L_3：$3x+(-a+1)y=-1$共交點，求序組$(x,y,a)=$________。【106 北模(2)】

答：$(1,-1,-3)$

解：$\begin{vmatrix}1 & 2 & a+2\\ 2 & 3 & -a-4\\ 3 & -a+1 & -1\end{vmatrix}=0\xrightarrow{a\in Z}a=-3$，故原式：$\begin{cases}x+2y=-1\\ 2x+3y=-1\\ 3x+4y=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\ y=-1\end{cases}$

C. 已知ΔABC中，$\angle A=120^\circ$，D為$\angle A$的內角平分線與$\overline{BC}$的交點，M為$\overline{BC}$的中點，若$\overline{AB}=6$，$\overline{AD}=4$，求$\overline{AM}=$________。（化為最簡根式）【106 北模(2)】

答：$3\sqrt{3}$

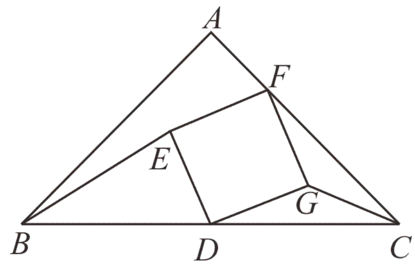
解：$\Delta ABC=\Delta ABD+\Delta ACD$

$\Rightarrow\dfrac{1}{2}\times6\times\overline{AC}\times\sin120^\circ=\dfrac{1}{2}\times6\times4\times\sin60^\circ+\dfrac{1}{2}\times4\times\overline{AC}\times\sin60^\circ$，故$\overline{AC}=12$

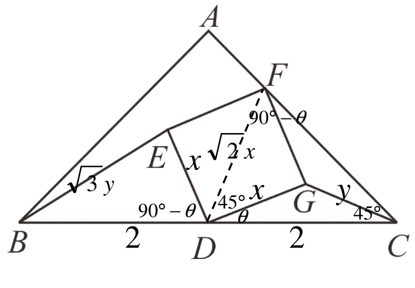
故由「餘弦定律」得知：$\overline{BC}=\sqrt{6^2+12^2-2\times6\times12\times\cos120^\circ}=\sqrt{252}=6\sqrt{7}$

故由「中線定理」得知：$6^2+12^2=2\left[\overline{AM}^2+\left(3\sqrt{7}\right)^2\right]\Rightarrow\overline{AM}=3\sqrt{3}$

D. 如圖所示，等腰直角ΔABC中，$\angle A=90^\circ$，D為$\overline{BC}$的中點，四邊形$DEFG$為正方形，且點F在$\overline{AC}$邊上，若$\overline{BE}=\sqrt{3}\ \overline{CG}$，$\overline{BC}=4$，則正方形$DEFG$的面積為________。（化為最簡根式）【106 北模(2)】



答：$4-2\sqrt{2}$



解：在ΔCDF中，由正弦定律：

$\dfrac{\sqrt{2}x}{\sin45^\circ}=\dfrac{2}{\sin(90^\circ-\theta)}\Rightarrow\cos\theta=\dfrac{1}{x}$

在ΔCDG中，由餘弦定律：

$y^2=x^2+4-2\times x\times2\times\cos\theta\Rightarrow y=x$

在ΔBDE中，由餘弦定律：

$3y^2=x^2+4-2\times x\times2\times\cos(90^\circ-\theta)$

$\Rightarrow3x^2=x^2+4-2\times x\times2\times\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}\Rightarrow x^2-2=-2\sqrt{x^2-1}$

$\Rightarrow x^4-4x^2+4=4x^2-4\Rightarrow x^4-8x^2+8=0\Rightarrow x^2=4\pm2\sqrt{2}$（取負）

E. 設圓C：$x^2+y^2-x-y=0$及直線L：$x+y-4=0$，若P為圓C上之動點，O為坐標平面上的原點，連接$\overleftrightarrow{OP}$，且令$\overleftrightarrow{OP}$與直線L之交點為Q，可得$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$為定值$k$，則$k=$________。【106 北模(2)】

答：4

解：$P(a,b)\in C\Rightarrow a^2+b^2-a-b=0$，故$a^2+b^2=a+b$

且$Q(at,bt)\in L\Rightarrow at+bt-4=0$，故$t=\dfrac{4}{a+b}$

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=a^2t+b^2t=\left(a^2+b^2\right)t=(a+b)\times\dfrac{4}{a+b}=4$

F. 滿足遞迴式$\begin{cases}F_1=1，F_2=1\\F_{n+2}=F_{n+1}+F_n\end{cases}$（$n$為自然數）的數列〈$F_n$〉稱為 *Fibonacci Sequence*，若以矩陣的方式來表現為$\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_n\\F_{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F_{n+1}\\F_{n+2}\end{bmatrix}$。若$\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}^8=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$，且$a+b+c+d=F_n$，試求數對$(a,n)=$________。【106 北模(2)】

答：$(13,11)$

解：〈F_n〉$=\langle 1,1,2,3,5,8,13,...\rangle$，其中$F_7=13$

$$\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F_1&F_2\\F_2&F_3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}^3=\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F_2&F_3\\F_3&F_4\end{bmatrix}$$

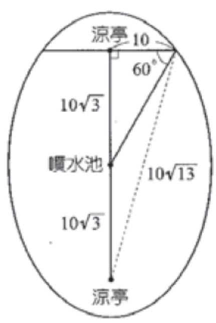
$$\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}^4=\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3\\3&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F_3&F_4\\F_4&F_5\end{bmatrix}$$

……

$\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}^8=\begin{bmatrix}F_7&F_8\\F_8&F_9\end{bmatrix}$，故$a+b+c+d=F_7+F_8+F_8+F_9=F_9+F_{10}=F_{11}$

G. 有一橢形的公園，其中心有一噴水池，距噴水池南北各$10\sqrt{3}$公尺處各有一涼亭，公園的邊界上任一點到兩涼亭的距離和均相等，現過涼亭闢一東西向的小徑，而小徑與公園邊界的交點處與噴水池之間鋪一直線健康按摩步道，若東西向的小徑與健康按摩步道的夾角為60°，則噴水池到公園最南端的距離為________公尺。（化為最簡根式）【106 北模(2)】

答：$5+5\sqrt{13}$



解：如圖，$2a=10+\sqrt{10^2+\left(20\sqrt{3}\right)^2}=10+10\sqrt{13}$

故所求$=a=5+5\sqrt{13}$