

臺北區 105 學年度第一學期第二次學科能力測驗

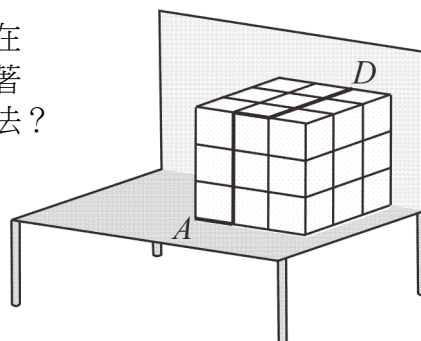


RA478

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. 右圖是一顆 3×3 的魔術方塊，也就是在一個正立方體中，每一面均有九個大小相等的正方形。現將其中一面緊靠在牆面，並靜置在桌面上（如圖所示），試求一隻螞蟻沿著分格線或稜線，從 A 點走捷徑到 B 點，有幾種不同的走法？（舉例說明：圖中粗線即為滿足條件之一條路徑。）



- (1) 28 種
(2) 56 種
(3) 74 種
(4) 110 種
(5) 138 種。

2. 若 $f(x, y) = (x-1)^2 + (y+1)^2 + (x-2y+1)^2$ ，試求此函数的最小值為下列何者？

- (1) $\frac{10}{3}$ (2) $\frac{8}{3}$ (3) 1 (4) 2 (5) 3。

3. 坐標平面上有一個正六邊形，其頂點以順時針方向依序為 $ABCDEF$ 。

已知 F 點的坐標為 $(0, 5)$ ， O 點為原點，且 A 、 B 皆在 x 軸上，則 $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AO} = ?$

- (1) 5 (2) $5\sqrt{3}$ (3) $\frac{25}{3}$ (4) $\frac{25}{3}\sqrt{3}$ (5) 25。

4. 已知一圓 $C: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 10$ ，平面上一點 $A(4, 2)$ ，直線 L 通過 A 點且與 x 軸正向的交角為 60° ，若直線 L 與圓 C 交於 P 、 Q 兩點，求 $\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AQ} = ?$

- (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) 1 (4) $\frac{3}{2}$ (5) $\frac{5}{4}$ 。

5. 考慮矩陣 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$ ，其中 a 、 b 、 c 為實數且行列式值 $\det(A) = \frac{1}{2}$ ，

求 $\det(A - A^{-1}) = ?$

- (1) $\frac{1}{8}$ (2) $\frac{1}{4}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) $\frac{9}{2}$ (5) $\frac{9}{4}$ 。

二、多選題

6. 設 $f(x)$ 為一實係數四次多項式， $i = \sqrt{-1}$ ，已知 $f(i+1) = 0$ 且不等式 $f(x) < 0$ 的解為 $-2 < x < 3$ ，則下列選項哪些是正確的？

- (1) $f(i-1) = 0$ (2) 若 a 、 b 為任意實數，且 $f(a+bi) = 2$ ，則 $f(a-bi) = -2$
(3) 不等式 $f(2x) > 0$ 的解為 $x < -1$ 或 $x > \frac{3}{2}$ (4) $y = f(x)$ 的圖形與 x 軸交於相異兩點
(5) $y = (x+2)f(x)$ 的圖形與 x 軸有三個交點。

7. 已知自然數 a 、 b 滿足 $\log_3 a = 20$ 且 $\log_3 b = 16$ ，則下列選項哪些是正確的？
- (1) 自然數 $a+b$ 必為 41 之倍數 (2) 自然數 a 的個位數字與 b 相同
 (3) 自然數 $a+b$ 為 9 位正整數 (4) 自然數 $a+b$ 展開後之末兩位數字為 22
 (5) 若定義實數 $A = n + \alpha$ ，其中 n 為整數且 $0 \leq \alpha < 1$ ，則稱 α 為實數 A 之小數部分，
 由此定義得 $\log_3 (a^4 + b^5)$ 之小數部分與 $\log_3 162$ 之小數部分相等。
8. 阿松申辦提款卡時，依銀行規定須自訂 4 個阿拉伯數字排成一組密碼。
 某天阿松欲提款時發現他忘了正確密碼，只記得是由奇數 1, 3, 5, 7, 9 中取出相異四個數字排列而成，現若依此隨機輸入號碼，試問下列選項哪些是正確的？
- (1) 他第一次就猜對的機率為 $\frac{1}{120}$
 (2) 提款機設定當輸入的密碼錯誤達三次時，會沒收該提款卡，阿松嘗試輸入不同密碼，
 則他的提款會被沒收的機率為 $\frac{39}{40}$
 承上述條件，若有一種智慧型提款機，每次輸入數字後會給提示，提示的口訣為
 「 $mAnB$ 」，其中 mA 表示輸入的數字當中有 m 個不但中了而且數字是在正確的位置，
 nB 表示輸入的數字當中有 n 個中了但是數字的位置不正確。例如：密碼為 7135，若輸入
 3159，則提示為「1A2B」。假使能善用提示，試問下列選項哪些是正確的？
- (3) 在第一次輸入就猜到「1A3B」的機率為 $\frac{1}{15}$
 (4) 他在第一次猜到「1A3B」的條件下，第二次猜到「4A0B」的機率為 $\frac{1}{8}$
 (5) 他在第一次猜到「1A3B」且在第二次猜到「4A0B」的機率為 $\frac{1}{120}$ 。
9. 若變數 X (身高) 的算術平均數為 μ_x ，標準差為 σ_x ；
 而變數 Y (體重) 的算術平均數為 μ_y ，標準差為 σ_y ；
 且變數 X 與變數 Y 的相關係數為 r_{xy} ，而 Y 對 X 的最佳迴歸直線為 $y = a + bx$ 。
 現將變數做線性轉換 $P = -2X + 1$ ， $Q = Y - 3$ ，則下列選項哪些是正確的？
- (1) 變數 P 的算術平均數 $\mu_p = -2\mu_x + 1$ (2) 變數 P 的標準差 $\sigma_p = -2\sigma_x$
 (3) 變數 P 與變數 Q 的相關係數 $r_{pq} = -r_{xy}$
 (4) Q 對 P 的迴歸直線方程式必過點 $(-2\mu_x + 1, \mu_y - 3)$
 (5) Q 對 P 的迴歸直線方程式的斜率為 $-\frac{b}{2}$ 。
10. 若空間中向量 $\vec{a} = (1, 2, -2)$ 、 $\vec{b} = (2, m, n)$ 、 $\vec{c} = (2, -1, 0)$ ，滿足 $|\vec{b}| = 3\sqrt{5}$ 且
 $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 45$ ，則下列選項哪些是正確的？
- (1) $(\vec{a} \times \vec{b}) \parallel \vec{c}$ (2) $\vec{a} \perp \vec{b}$ (3) $m = 4$
 (4) $n = 5$ (5) $(\vec{a} \times \vec{c}) + \vec{b} = \vec{0}$ 。

11. 已知空間中三點 $A(2, 2, 1)$ 、 $B(1, 3, -1)$ 、 $C(1, 1, -1)$ ，若在空間中與 A 、 B 、 C 三點等距離的所有點所形成的圖形為 Γ ，則下列選項哪些是正確的？

(1) $\Gamma : x - y + 2z + 1 = 0$ (2) $\Gamma : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 \\ z = t \end{cases}, t \in R$

(3) Γ 中最接近原點的點為 $\left(\frac{1}{5}, 2, \frac{2}{5}\right)$ (4) Γ 中與原點最接近的距離為 $\sqrt{\frac{21}{5}}$

(5) ΔABC 的面積為 $\sqrt{5}$ 。

12. 設 A 、 B 、 C 為矩陣， I 為單位方陣。下列有關矩陣的敘述哪些是正確的？

(1) 若 $AB = BA$ ，則矩陣 A 、 B 皆為方陣 (2) 若 $AC = BC$ ，且 $\det(C) \neq 0$ ，則 $A = B$

(3) 若 $A^2 = I$ ，則 $A = I$ 或 $A = -I$ (4) 若 $AB = BA$ ，則 $AB^{10} = B^5 AB^5 = B^{10} A$

(5) 若 AB 有乘法反元素，則 $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ 。

13. 若方程式 $(x^2 + y^2 - 4x)(y^2 - x - 7) = 0$ 之圖形與直線 $L : mx - y + 4 - 2m = 0$ 有四個相異的交點，請問符合的 m 值可能為下列哪些？

(1) -2 (2) -1 (3) 0 (4) 1 (5) 2。

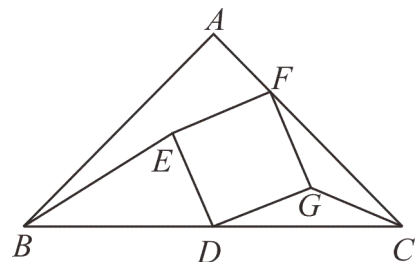
第貳部分：選填題

- A. 若有一群人，任意取完 2 本相同書籍的方法數超過 1000 種，試問這一群人至少有 _____ 個人。

- B. 已知 a 為整數，若平面上三直線 $L_1 : x + 2y = a + 2$ ， $L_2 : 2x + 3y = -a - 4$ ， $L_3 : 3x + (-a + 1)y = -1$ 共交點，求序組 $(x, y, a) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

- C. 已知 ΔABC 中， $\angle A = 120^\circ$ ， D 為 $\angle A$ 的內角平分線與 \overline{BC} 的交點， M 為 \overline{BC} 的中點，若 $\overline{AB} = 6$ ， $\overline{AD} = 4$ ，求 $\overline{AM} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。（化為最簡根式）

- D. 如圖所示，等腰直角 ΔABC 中， $\angle A = 90^\circ$ ， D 為 \overline{BC} 的中點，四邊形 $DEFG$ 為正方形，且點 F 在 \overline{AC} 邊上，若 $\overline{BE} = \sqrt{3} \overline{CG}$ ， $\overline{BC} = 4$ ，則正方形 $DEFG$ 的面積為 _____。（化為最簡根式）



E. 設圓 $C : x^2 + y^2 - x - y = 0$ 及直線 $L : x + y - 4 = 0$ ，若 P 為圓 C 上之動點， O 為坐標平面上的原點，連接 \overleftrightarrow{OP} ，且令 \overleftrightarrow{OP} 與直線 L 之交點為 Q ，可得 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ 為定值 k ，則 $k =$ _____。

F. 滿足遞迴式 $\begin{cases} F_1 = 1, F_2 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$ (n 為自然數) 的數列 $\langle F_n \rangle$ 稱為 *Fibonacci Sequence*，若以矩陣的方式來表現為 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_{n+2} \end{bmatrix}$ 。若 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^8 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，且 $a + b + c + d = F_n$ ，試求數對 $(a, n) =$ _____。

G. 有一橢形的公園，其中心有一噴水池，距噴水池南北各 $10\sqrt{3}$ 公尺處各有一涼亭，公園的邊界上任一點到兩涼亭的距離和均相等，現過涼亭闢一東西向的小徑，而小徑與公園邊界的交點處與噴水池之間鋪一直線健康按摩步道，若東西向的小徑與健康按摩步道的夾角為 60° ，則噴水池到公園最南端的距離為_____公尺。（化為最簡根式）

RA478 臺北區 105 學年度第一學期第二次學科能力測驗

第壹部分：選擇題

1. (3) 2. (2) 3. (3) 4. (3) 5. (4) 6. (3)(4) 7. (1)(2)(4)(5) 8. (1)(2)(3)(4)(5)
9. (1)(3)(4)(5) 10. (1)(2)(3)(4)(5) 11. (2)(3)(4)(5) 12. (1)(2)(4) 13. (1)(5)

第貳部分：選填題

- A. 45 B. $(1, -1, -3)$ C. $3\sqrt{3}$ D. $4 - 2\sqrt{2}$ E. 4 F. $(13, 11)$
G. $5 + 5\sqrt{13}$