

全國高級中學 105 學年度第 1 學期第二次學科能力測驗



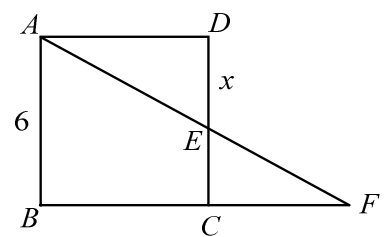
第壹部分：選擇題(佔 50 分)

一、 單選題(占 20 分)

- 1.() 若 $a = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$, $b = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$, 則 $a^5 + b^5$ 的值為何?
 (1) 30248 (2) 30256 (3) 30736 (4) 31672 (5) 32768
- 2.() 若數列 $\langle a_n \rangle$ 的前 n 項和 $S_n = n^2 - 5n$, 數列 $\langle b_n \rangle$ 的遞迴定義式為 $\begin{cases} b_1 = 4 \\ b_{n+1} - b_n = 3, n \geq 1 \end{cases}$,
 則 $\sum_{n=1}^{15} (a_n \times b_n)$ 的值為何?
 (1) 5050 (2) 5225 (3) 5430 (4) 5625 (5) 5860
- 3.() 銀行推出年利率 6% , 每月複利一次的青年成家優惠專案 , 阿宅打算每個月固定存入一筆錢 , 讓自己在十年後能夠有六百萬本利和的購屋基金 , 那麼阿宅每個月固定存入的金額最少約為多少萬元?(已知 $1.005^{121} \approx 1.828$)
 (1) 3.4 萬元 (2) 3.7 萬元 (3) 4.1 萬元 (4) 4.5 萬元 (5) 4.8 萬元
- 4.() 某校男女學生的人數比為 3 : 2 , 學期結束後經統計 , 男學生有 $\frac{1}{3}$ 、女學生有 $\frac{2}{5}$ 需要補考數學。今已知一學生需要補考數學 , 則此學生是女生的機率為何?
 (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{2}{5}$ (3) $\frac{3}{8}$ (4) $\frac{4}{9}$ (5) $\frac{7}{15}$

二、 多選題(占 30 分)

- 5.() 如右圖 , 邊長為 6 的正方形 $ABCD$ 中 , 點 E 在 \overline{CD} 邊上 , 且 \overline{AE} 與 \overline{BC} 的延長線交點為 F , 設 $\overline{DE} = x$, 則下列選項哪些正確?



- (1) \overline{CF} 的長度以 x 表示為 $\frac{6x - x^2}{6}$
- (2) 若 y 表 $\triangle ADE$ 與 $\triangle CEF$ 的面積和 , 則 y 以 x 表示為 $\frac{6x^2 - 36x + 108}{x}$
- (3) 承(2) , y 的最小值不超過 15 (4) 承(2) , 當 y 有最小值時 , $x=3$
- (5) 承(2) , 當 y 有最小值時 , $\overline{AF} = 6\sqrt{3}$
- 6.() 設 $f(x)$ 為一實係數四次多項式 , 已知 $f(2i+3)=0$, 且 $f(x) < 0$ 的解為 $-1 < x < 2$, 則下列選項哪些正確?
- (1) $f(2i-3)=0$ (2) $f(2+i)=f(2-i)$ (3) $f(x)$ 除以 $x-1$ 的餘式為 -16
- (4) $f(2x) > 0$ 的解為 $x < -\frac{1}{2}$ 或 $x > 1$ (5) $y=f(x)$ 的圖形與 x 軸有兩個交點

- 7.() 設 $n=12^{15}$ ，則下列選項哪些正確？
 (1) n 展開後為 16 位數 (2) n 的首位數字為 1 (3) n 的十位數字為 6
 (4) n 的百位數字為 5 (5) n 除以 169 的餘數為 27
- 8.() 下列各方程式哪些恰有兩個實根？
 (1) $2^{-x} + x - 2 = 0$ (2) $2^x - x^2 = 0$ (3) $\log_2 x - (x-1)^2 = 0$
 (4) $2^x - \log_2 |x| = 0$ (5) $2^{-x} - |\log_2 x| = 0$
- 9.() 有甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬共 9 人，下列選項哪些正確？
 (1) 9 人排成一列，則甲，乙，丙三人完全分開的機率為 $\frac{5}{12}$
 (2) 等分成三組，則甲，乙，丙任兩人皆不同組的情形有 90 種
 (3) 等分成三組，則甲，乙兩人在同一組的機率為 $\frac{1}{3}$
 (4) 任選 5 人，則甲，乙同時被選中的情形有 35 種
 (5) 任選 5 人，已知甲被選中的條件下，則乙同時也被選中的機率為 $\frac{5}{12}$
- 10.() 設有 40 筆 (x_i, y_i) 的二維數據，已知 $\mu_x = 3$ ， $\sigma_x = 5$ 與 $\sum_{i=1}^{40} x_i y_i = 2400$ ，而變量 Y 中有兩筆數據 14 與 20 經過標準化後，變成 -0.25 與 1.25 ，則下列選項哪些正確？
 (1) 變量 X 中的數據 11 經過標準化後變成 2 (2) $(\mu_y, \sigma_y) = (15, 4)$
 (3) $\sum_{i=1}^{40} (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y) = 800$ (4) X 與 Y 的相關係數為 0.8
 (5) Y 對 X 的迴歸直線方程式為 $y = \frac{3}{5}x + \frac{66}{5}$

第貳部分：選填題(占 50 分)

- A. 若 $f(x) = 9 \times \frac{(x+2)(x-6)}{(1+2)(1-6)} - 15 \times \frac{(x-6)(x-1)}{(-2-6)(-2-1)} - 15 \times \frac{(x-1)(x+2)}{(6-1)(6+2)}$ ，則 $f(x)$ 圖形的頂點坐標為_____。(化為最簡分數)
- B. 已知實係數方程式 $x^3 - px^2 - \frac{13}{4}x + \frac{15}{8} = 0$ 的三個相異實根形成等差數列，則 p 值為_____。(化為最簡分數)
- C. 擲五顆公正的骰子一次，求出現葫蘆(有三顆同點數，另外兩顆同另一點數，例如：11133，45454，...)的機率為_____。(化為最簡分數)

- D. 有一籃球隊的 12 名隊員身高如下：170，173，176，180，180，180，181，181，183，187，190，191，今隨機抽取 3 人，則此 3 人身高的中位數是 181 的機率為 _____。(化為最簡分數)
- E. 大聯盟由美國聯盟與國家聯盟所組成，每個聯盟有 15 隊，各聯盟再分成東區、中區、西區，各分區皆有 5 隊。每年賽季例行賽，同聯盟同區的兩隊須交手 8 場，同聯盟不同區的兩隊須交手 7 場，不同聯盟的兩隊須交手 4 場，則大聯盟每年賽季共有 _____ 場例行賽。
- F. 有一組數據如下：1，2，2，3，3，3，4 個 4，……， n 個 n ，已知這組數據的平均數是 11，則這組數據的變異數為 _____。
- G. 已知坐標平面上有 $(-2, -3)$ ， $(1, -1)$ ， $(1, 2)$ ， $(5, 3)$ ， $(5, 4)$ 五點，則這五點所決定的迴歸直線可用來預測：當 $x=3$ 時， $y=_____$ 。(化為最簡分數)
- H. 設 p ， q 是不為 1 的自然數，則滿足方程式 $\log_2 \frac{5050}{p} + 2(1 - \log_2 10) \log_5 q = 0$ 的 p 值為 _____。
- I. 對於正數 a ，其小數部分以 $\langle a \rangle$ 表示，如 $\langle 1.23 \rangle = 0.23$ ，今定義函數 $f(x) = \left\langle \sqrt{2x + \frac{2}{3}} \right\rangle$ ，已知 $1 \leq \alpha \leq 2$ 且 $f(\alpha) = 0$ ，則 α 值為 _____。(化為最簡分數)
- J. 已知 r 是不為 1 的正數，有一等比數列： $r, r^2, r^3, \dots, r^{15}$ 共 15 項，若從中任選相異四項，則此四項也能形成底比數列的機率為 _____。(化為最簡分數)

RA270 全國高級中學 105 學年度第 1 學期第二次學科能力測驗
參考答案

第壹部分：選擇題

- 1.(1) 2.(3) 3.(2) 4.(4) 5.(2)(3)(5) 6.(4)(5) 7.(2)(3) 8.(1)(3)(5)
9.(1)(2)(4) 10.(2)(5)

第貳部分：選填題

- A. $(2, \frac{53}{5})$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{25}{648}$ D. $\frac{29}{110}$ E. 2430 F. 15 G. $\frac{17}{9}$ H. 202
I. $\frac{7\sqrt{2}}{6}$ J. $\frac{2}{91}$