RA268 105 台中女中複習考數學考科詳解

一、單選題

1.(4)

[解]設t秒相遇

$$\Rightarrow \frac{400t}{60}-\frac{400t}{68}=400k \text{ ， } k\in N$$

$$\Rightarrow \frac{t}{60}-\frac{t}{68}=k \Rightarrow t=510k$$

當$k=1$時，甲選手跑了510秒$\Rightarrow \frac{510}{60}=8.5$(圈)，故在第 9 圈時超越

2.(3)

[解] $\because (\frac{1}{4})^{-0.25}=\sqrt{2} \Rightarrow m=\sqrt{2}-1 \Rightarrow m+\frac{1}{m}=\sqrt{2}-1+\frac{1}{\sqrt{2}-1}=2\sqrt{2}$

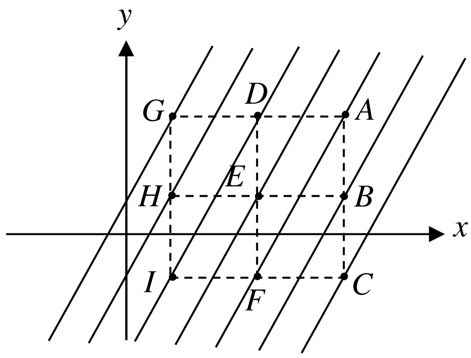
$$\Rightarrow \sqrt{m^3+\frac{1}{m^3}+27}=\sqrt{(m+\frac{1}{m})(m^2-1+\frac{1}{m^2})+27}=\sqrt{10\sqrt{2}+27}=5+\sqrt{2}\approx 6.414$$

3.(4)

[解] $\because k=2016x-1008y$ 表斜率為 2 的直線

故通過此 9 點的直線共有 7 條

因此有 7 個不同的k值



4.(5)

[解]由三角不等式可知，對於任意實數x，恆有$|x|+|x-5|=|x|+|5-x|\geq|x+5-x|=5$，

故$|x|+|x-5|=2$無實數解。

5.(1)

[解]原條件可整理為$\begin{cases}\alpha^2-5\alpha-2=0\\ \beta^2-5\beta-2=0\end{cases}$，表示$\alpha,\beta$為方程式$x^2-5x-2=0$之兩根(為實根)。

由根與係數關係可知：$\begin{cases}\alpha+\beta=5\\ \alpha\beta=-2\end{cases}$，又$\alpha,\beta$為實數，故$\alpha,\beta$異號，可得$\frac{\beta}{\alpha}<0$，$\frac{\alpha}{\beta}<0$。

$$\Rightarrow \left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}+\sqrt{\frac{-5\alpha}{2-\beta^2}}\right)^2=\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}+\sqrt{\frac{-5\alpha}{-5\beta}}\right)^2=\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}-2=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}-2=-\frac{33}{2} \text{ 。}$$

6.(1)

[解]一般項為$C_k^8\cdot(\frac{x}{\sqrt{y}})^{8-k}\cdot(-\frac{y}{\sqrt{x}})^k=C_k^8\cdot(-1)^k\cdot x^{8-\frac{3}{2}k}\cdot y^{\frac{3}{2}k-4}\Rightarrow k=3$，故係數為$C_3^8\cdot(-1)^3=-56$

二、多選題

7.(2)(3)(4)

[解] (1)錯誤：$0.3>0.2\Rightarrow(0.3)^{0.3}>(0.2)^{0.3}$。

(2)正確：$\log_{0.96}0.98>0$，$\log_{0.99}1.01<0$，故$\log_{0.96}0.98>\log_{0.99}1.01$

(3)正確：$3^{0.2}>1$，$\log_5 4<1$，故$3^{0.2}>\log_5 4$

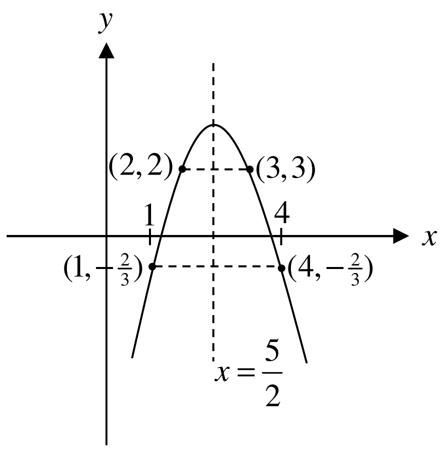
(4)正確：$3^{\log_9 4}=3^{\log_3 2}=2$，故比較 2 與$10^{0.3}$(取 log)，log2＝0.301，$\log10^{0.3}=0.3$，故$2>10^{0.3}$。

(5)錯誤：$\frac{\log14.99+\log15.01}{2}=\log\sqrt{14.99\times15.01}<\log\frac{14.99+15.01}{2}=\log15$

8.(1)(2)

[解]依題意：$f(1)=-\frac{2}{3}$，$f(2)=2$，$f(4)=-\frac{2}{3}$，且$\deg f(x)=2$

(1)正確：如圖$\because f(1)=f(4)\Rightarrow$對稱軸為$x=\frac{5}{2}$



令$f(x)=a(x-1)(x-4)-\frac{2}{3}$

$\Rightarrow2=a(2-1)(2-4)-\frac{2}{3}\Rightarrow a=-\frac{4}{3}$

$\Rightarrow f(x)=-\frac{4}{3}(x-1)(x-4)-\frac{2}{3}$

故最大值$f(\frac{5}{2})=-\frac{4}{3}(\frac{3}{2})(\frac{-3}{2})-\frac{2}{3}=\frac{7}{3}$

(2)正確：由對稱性知：$f(3)=2$

(3)錯誤：設$f(x)$除以$(x-1)(x-2)$的餘式為$ax+b$，由$f(1)=a+b=-\frac{2}{3}$，$f(2)=2a+b=2$

得$a=\frac{8}{3}$，$b=-\frac{10}{3}\Rightarrow$餘式為$\frac{8}{3}x-\frac{10}{3}$

(4)錯誤：$\because f(2)=f(3)=2\Rightarrow f(1)f(2)<0$，$f(3)f(4)<0\Rightarrow\alpha\in(1,2)$，$\beta\in(3,4)$

$\Rightarrow f(x)=0$的兩根α、$\beta\in$區間$(1,4)$

(5)錯誤：由圖可知：$f(x)>0$的解為$\alpha<x<\beta(\alpha<\beta)$且$\alpha\in(1,2)$，$\beta\in(3,4)$

故其整數解有$x=2,3$共 2 個

9.(1)(2)(5)

[解] (1)正確：$c_3 = S_3T_3 - S_2T_2 = 14\times6 - 6\times3 = 66$

(2)正確：$1^\circ\big)$ $n=1$ ：$a_1 = 2, b_1 = 1, c_1 = 2 \Rightarrow c_1 \ge a_1 \ge b_1$

$2^\circ\big)$ $n \ge 2$ ：易知 $a_n = 2^n > n = b_n$

$$c_n = \frac{2(2^n-1)}{2-1}\cdot\frac{n(n+1)}{2} - \frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}\cdot\frac{(n-1)(n)}{2} = 2n\left[2^{n-2}(n+3)-1\right] > 2n(2^{n-1}) > 2^n$$

故 $c_n \ge a_n \ge b_n$

(3)錯誤：$\because S_n = \dfrac{2(2^n-1)}{2-1} = 2^{n+1}-2 \approx 2^{n+1}$ 為 10 位數 $\Rightarrow 9 \le \log 2^{n+1} < 10 \Rightarrow 9 \le (n+1)\log 2 < 10$

$$\Rightarrow \frac{9}{0.301} \le (n+1) < \frac{10}{0.301} \Rightarrow 29.9\cdots \le n+1 < 33.2\cdots\cdots$$

$\Rightarrow 28.9\cdots \le n < 32.2\cdots \Rightarrow n = 29, 30, 31, 32$ 共 4 個

(4)錯誤：$\dfrac{T_n}{(n+2)T_{n+1}} = \dfrac{\frac{n(n+1)}{2}}{(n+2)\frac{(n+1)(n+2)}{2}} = \dfrac{n}{n^2+4n+4} = \dfrac{1}{n+\frac{4}{n}+4} \le \dfrac{1}{2\sqrt{4}+4} = \dfrac{1}{8}$

(5)正確：

$$\begin{aligned}
c_1 &= a_1b_1\\
c_2 &= S_2T_2 - a_1b_1\\
c_3 &= S_3T_3 - S_2T_2\\
&\vdots\\
+)\ c_{10} &= S_{10}T_{10} - S_9T_9
\end{aligned}$$

累加：$\displaystyle\sum_{n=1}^{10} c_n = S_{10}T_{10} = \frac{2(2^{10}-1)}{2-1}\cdot\frac{10(11)}{2} = 110(2^{10}-1) > 100(2^{10}-1) > 100(10^3) = 10^5$

10.(1)(2)(3)

[解](1)正確：$P(B) = \dfrac{4}{52} = \dfrac{1}{13}$

(2)正確：$P(A) = P(B) = \dfrac{1}{13}$

(3)正確：$P(A\cap B) = \dfrac{C_2^4\cdot 2!\cdot 50}{C_3^{52}\cdot 3!} = \dfrac{1}{221} \Rightarrow P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{1}{221}}{\frac{1}{13}} = \dfrac{1}{17}$

(4)錯誤：$P(C) = \dfrac{C_2^4\cdot 2!\cdot 48}{C_3^{52}\cdot 3!}\times 3$ ，$P(B\cap C) = \dfrac{C_2^4\cdot 2!\cdot 48}{C_3^{52}\cdot 3!}\times 2 \Rightarrow P(B|C) = \dfrac{P(B\cap C)}{P(C)} = \dfrac{2}{3}$

(5)錯誤：$P(A) = P(B) = \dfrac{1}{13}$ ，$P(A\cap B) = \dfrac{1}{221} \Rightarrow P(A\cap B) \ne P(A)\cdot P(B)$ 所以不獨立

11. (2)(3)(5)

[解](1)錯誤：表中的三個資料點皆落在直線 $g'(x)=2x+18$ 上，故對於任意多項式 $q(x)$，多項式 $f(x)=(x-7)(x-7.5)(x-8)q(x)+g'(x)$ 恆過此三點，故有無限多個。

設 $y=f'(x)$ 為滿足此筆資料的二次多項式，則恆有 $\begin{cases} f'(7)=32=g'(7) \\ f'(7.5)=33=g'(7.5) \\ f'(8)=34=g'(8) \end{cases}$

又 $f'(x)$ 與 $g'(x)$ 的次數皆不超過二次，故得 $f'(x)=g'(x)=2x+18$，與假設矛盾！故 $f(x)$ 的次數不可能為二次。

(2)正確：設 $g(x)$ 為滿足此筆資料的最低次多項式，又 $g'(x)=2x+18$ 亦滿足此筆資料，故 $g(x)$ 的次數不超過一次。如(1)之說明，任何滿足此筆資料且次數不超過二次的多項式必唯一存在，故得 $g(x)=g'(x)=2x+18$。

(3)正確：$h(x)$ 滿足此筆資料且次數不超過二次，故 $h(x)=2x+18$，可得 $h\left(\dfrac{23}{3}\right)=33.\bar{3}$。

(4)錯誤：依題意，$f(x)=(x-7)(x-7.5)(x-8)q(x)+r(x)$，可得 $\begin{cases} r(7)=f(7)=32 \\ r(7.5)=f(7.5)=33 \\ r(8)=f(8)=34 \end{cases}$，

$r(x)$ 亦滿足此筆資料且次數不超過二次，故 $r(x)=2x+18$。

(5)正確：承以上說明，$g(x)=h(x)=r(x)=2x+18$。

12. (1)(2)(4)(5)

[解](1)正確：$x\ge 3$ 時，$t=\log_3 x\ge\log_3 3=1$，必為正數；又 $\log_x 3=\dfrac{1}{\log_3 x}=\dfrac{1}{t}$。

(2)正確：$2t$ 與 $\dfrac{1}{t}$ 皆為正數，可由算幾不等式得 $4+2t+\dfrac{1}{t}\ge 4+2\sqrt{2t\cdot\dfrac{1}{t}}=4+2\sqrt{2}$。

(3)錯誤：承(2)，其等號成立時機為 $2t=\dfrac{1}{t} \Leftrightarrow t^2=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow t=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}<1$

因為 $t\ge 1$，故等號不可能成立，即最小值不為 $4+2\sqrt{2}$。

(4)正確：$f(t_1)-f(t_2)=2(t_1-t_2)+\dfrac{t_2-t_1}{t_1t_2}=(t_1-t_2)\left(2-\dfrac{1}{t_1t_2}\right)>0$

(5)正確：由(4)，$f(t)=4+2t+\dfrac{1}{t}$ 在 $t\ge 1$ 時為嚴格遞增，故當 $t=1$(即 $x=3$)時，有最小值 7。

選填題

A. 3183624

[解] $2\times 10^6\times(1+10\times 0.05)\times(1+0.02)^3=3183624$

B. $-11x+35$

[解] $a+b+c+d+e+f=16 \Rightarrow f(4)=16$

$$
\begin{array}{cccccc|c}
1 & -k & 4k-12 & -15 & -2 & k & \\
 & 4 & -4k+16 & 16 & 4 & 8 & 4 \\
\hline
1 & -k+4 & 4 & 1 & 2 & k+8 &
\end{array}
$$

$\Rightarrow k+8=16 \Rightarrow k=8 \Rightarrow f(x)=x^5-8x^4+20x^3-15x^2-2x+8$

$$
\begin{array}{cccccc|c}
1 & -8 & 20 & -15 & -2 & 8 & \\
 & 3 & -15 & 15 & 0 & -6 & 3 \\
\hline
1 & -5 & 5 & 0 & -2 & \boxed{2} & \\
 & 3 & -6 & -3 & -9 & & \\
\hline
1 & -2 & -1 & -3 & \boxed{-11} & &
\end{array}
$$

故 $f(x)$ 除以 $(x-3)^2$ 的餘式 $e(x-3)+f=-11(x-3)+2=-11x+35$。

C. 12

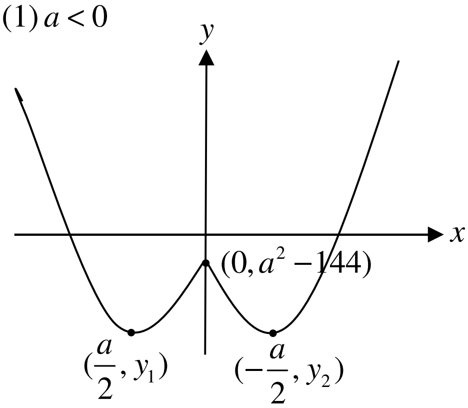
[解]令 $y=x^2+a|x|+a^2-144$

1°) 若 $x\ge 0 \Rightarrow y=x^2+ax+a^2-144=(x+\frac{a}{2})^2+a^2-144-\frac{a^2}{4}$

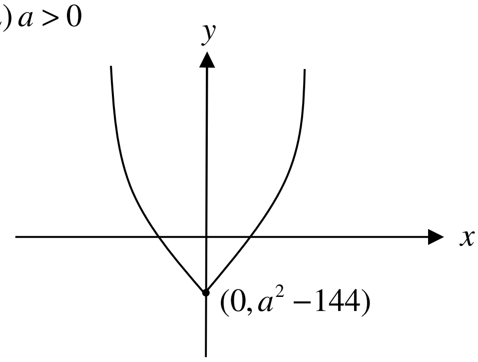
2°) 若 $x<0 \Rightarrow y=x^2-ax+a^2-144=(x-\frac{a}{2})^2+a^2-144-\frac{a^2}{4}$

再依 a 的正負討論的到下列兩種圖形：($a=0$ 不合)

(1) $a<0$



(2) $a>0$



由上圖可知：左圖不可能恰一個解，故不合。

而右圖要恰一個解 $\Rightarrow a^2-144=0 \Rightarrow a=\pm 12$ (取正)

[另解] $\because y=x^2+a|x|+a^2-144$ 是偶函數，圖形對稱 y 軸，故恰有 $x=0$ 一解

$\Rightarrow$ 常數項 $a^2-144=0 \Rightarrow a=\pm 12$

當 $a=-12$ ：$|x|^2-12|x|=0 \Rightarrow |x|=0 \vee 12 \Rightarrow x=0 \vee \pm 12$ (不合)

D. 7260

[解] $\langle a_n \rangle = \langle 3,5,7,9,11,13,\cdots\cdots \rangle \Rightarrow a_i = 3+(i-1)\cdot 2 = 2i+1$

$$\langle b_n \rangle = 4\langle 1,3,6,10,15,21,\cdots\cdots \rangle \Rightarrow b_i = 4\left(1+(2+3+4+\cdots+i\right) = 4\times\frac{i(i+1)}{2} = 2i^2+2i$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{10} d_i = \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{2} a_i b_i = \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{2}(2i+1)\left(2i^2+2i\right) = \sum_{i=1}^{10} 2i^3+2i^2+i$$

$$= 2\cdot\left(\frac{10\times 11}{2}\right)^2 + 2\cdot\frac{10\times 11\times 21}{6} + \frac{10\times 11}{2} = 7260$$

E. 0

[解] $f(x) = k(x-2)\left[x-(1+i)\right]\left[x-(1-i)\right] = k(x-2)(x^2-2x+2)$ ，$k>0$

設 $g(x) = a(x-1)(x-2)(x-3)+x$ ，由 $g(4)=6a+4=16 \Rightarrow a=2$

故 $\dfrac{f(x)}{g(x)-x} \le 0 \Rightarrow \dfrac{k(x-2)(x^2-2x+2)}{2(x-1)(x-2)(x-3)} \le 0 \Rightarrow (x-1)(x-3) \le 0$ ，但 $x \ne 1,2,3$

$\Rightarrow 1<x<3$ ，但 $x\ne 2$ ，故整數解個數為 0 個。

F. 198

[解]由根與係數的關係知：$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=24 \\ \alpha\beta\gamma=-d>0 \end{cases}$，且 α, β 中有兩個是正奇數，故另一根必為正偶數。

設 $\begin{cases} \alpha=2x+1 \\ \beta=2y+1 \\ \gamma=2z+2 \end{cases}$ ，其中 x,y,z 皆為非負整數，則 $(2x+1)+(2y+1)+(2z+2)=24$

$\Rightarrow x+y+z=10$ 的非負整數解組數為 $H_{10}^{3} = C_{10}^{10+3-1} = 66$ 。

G. $\dfrac{3}{7}$

[解]設 A_1 ：選到答案為「圈」的事件；A_2 ：選到答案為「叉」的事件。

$\{A_1, A_2\}$ 形成樣本空間的一組分割。

設 B ：甲生回答「圈」且乙生回答「叉」的事件。則所求即

$$P(A_1 | B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)} = \frac{\frac{4}{10}\times\left(\frac{9}{10}\times\frac{1}{9}\right)}{\frac{4}{10}\times\left(\frac{9}{10}\times\frac{1}{9}\right)+\frac{6}{10}\times\left(\frac{1}{10}\times\frac{8}{9}\right)} = \frac{3}{7}$$

H. $\frac{1}{100}$

[解] $(\log y)^2+2(2^x+2^{-x})\log y+2(2^{2x}+2^{-2x})=0$

$\Rightarrow(\log y)^2+2(2^x+2^{-x})\log y+(2^x+2^{-x})^2+(2^{2x}+2^{-2x}-2)=0$

$\Rightarrow(\log y+2^x+2^{-x})^2+(2^x-2^{-x})^2=0\Rightarrow\begin{cases}\log y+2^x+2^{-x}=0\\2^x-2^{-x}=0\end{cases}$

由 $2^x-2^{-x}=0$ 得 $x=0$ $\quad\therefore\log y=-2\Rightarrow y=\frac{1}{100}$ $\quad\therefore x+y=\frac{1}{100}$