

# 國立台中一中九十學年度合作杯數學競試試題

計算及證明題:每題 20 分,總分 140 分

壹. 二個三個字母之字串  $aaa, bbb$  通過電路傳送,每一個字串都是一個字母一個字母傳送,由於線路有問題使得每個字母都有  $\frac{1}{3}$  之可能性被傳送錯(傳送 a 卻收到 b, 傳送 b 卻收到 a)而且每個字母收到正確與否與其他字母收到正確與否無關,令  $S_a$  為傳送  $aaa$  時收到的信息,  $S_b$  為傳送  $bbb$  時收到的信息. 令  $P$  為  $S_a$  依字典字母順序在  $S_b$  前之機率,求  $P$  之值

貳. 設  $P_0(x) = x^3 + 313x^2 - 77x - 8$

$\forall n \in N$  若  $P_n(x) = P_{n-1}(x-n)$  則  $P_{20}(x)$  中  $x$  項之係數為何?

參. 函數  $f$  之定義域為  $N$ (自然數系)滿足  $f(n) = \begin{cases} n-3 & \text{當 } n \geq 1000 \\ f(f(n+7)) & \text{當 } n < 1000 \end{cases}$

求  $f(90) = ?$

肆. 求所有滿足:對任一實數  $x$  有  $xf(x-1)=(x-26)f(x)$  此條件之所有多項式  $f(x)$

伍. 正項數列  $\langle a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \rangle$  滿足

$$a_0 = a_1 = 1, \sqrt{a_n \cdot a_{n-2}} - \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n-2}} = 2a_{n-1} (n \geq 2) \text{ 求 } a_n$$

陸.  $m \in N, P$  為質數,  $a_1, a_2, \dots, a_{2m-1}, a_{2m}$  為相異整數,方程式

$$(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{2m-1})(x-a_{2m}) = P^{m(m-1)}$$
 有整數解,求證:

$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2m-1} + a_{2m}$  為  $2m$  的倍數

柒. 求出所有邊長為整數、內切圓半徑為 1 的三角形。