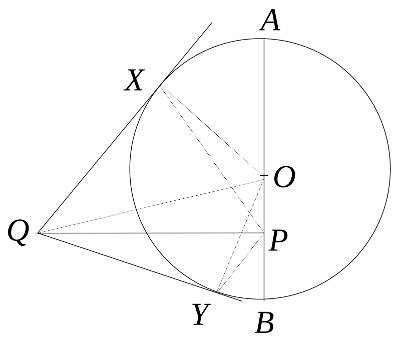
POMONA-WISCONSIN MATHEMATICS TALENT SEARCH

PROBLEM SET II (1996-97) NOVEMBER 1996

1.設 $a+b+c$ 及 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ 同時為 0 ,

則 $\begin{cases} a+b+c=0 \\ ab+bc+ca=0 \end{cases} \Rightarrow (a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=0 \Rightarrow a^2+b^2+c^2=0$

$\Rightarrow a=b=c=0$ (矛盾) 故得證.



2.設 O 為圓心,連接 $\overline{OX}$, $\overline{OY}$, $\overline{OQ}$,

則 $OXQYP$ 五點共圓(以 $\overline{OQ}$ 為直徑)

因此 $\angle BPY=\angle OQY=\angle OQX=\angle OPX$

所以 $\angle QPX=\angle QPY$

3.因為 $x+x^2+x^8=y+y^2+y^8$

所以 $x+x^2+x^8-(y+y^2+y^8)=0 \Rightarrow (x-y)+(x^2-y^2)+(x^8-y^8)=0$

$\Rightarrow (x-y)+(x-y)(x+y)+(x^4+y^4)(x^2+y^2)(x+y)(x-y)=0$

$\Rightarrow (x-y)[1+(x+y)[1+(x^4+y^4)(x^2+y^2)]]=0$

(1)如果 $x^2+y^2=0$ 則 $x=y=0$ 則證明完畢.

(2)如果 $x^2+y^2\neq 0$ 則 $1+(x^4+y^4)(x^2+y^2)>1$

$\Rightarrow (x+y)[1+(x^4+y^4)(x^2+y^2)]\neq -1$

$\Rightarrow 1+(x+y)[1+(x^4+y^4)(x^2+y^2)]\neq 0$

$\Rightarrow x-y=0 \Rightarrow x=y$ 證明完畢

4.設 $x=\underbrace{3333\ldots333}_{n個}5$ 則 $x=\frac{10}{3}(9999\ldots999)+5=\frac{10}{3}(10^n-1)+5$

$\Rightarrow x^2=\frac{100}{9}(10^n-1)^2+\frac{100}{3}(10^n-1)+25$

$\Rightarrow x^2=\frac{100}{9}(10^{2n}-2\cdot 10^n+1+3\cdot 10^n-3)+25$

$\Rightarrow x^2=100(\frac{10^{2n}-1}{9}+\frac{10^n-1}{9})+25$

$\Rightarrow x^2=100\cdot(\underbrace{111\ldots111}_{n個}\underbrace{222\ldots222}_{n個})+25$

$\Rightarrow x^2=\underbrace{111\ldots111}_{n個}\underbrace{222\ldots222}_{n個}25$ 故得證.

5. (1)因為 $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$

(2)因為 $\frac{1}{2^{2k+1}\cdot 3}=\frac{4}{2^{2k+1}\cdot 3\cdot 4}=\frac{1+3}{2^{2k+3}\cdot 3}=\frac{1}{2^{2k+3}}+\frac{1}{2^{2k+3}\cdot 3}$, $\forall\ k\in N$

所以 $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^3\cdot 3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^5\cdot 3}$

依此類推本題得證.