省立台中一中員生社 八十八學年度合作盃數學競試試題解答

解題小組：施能強、翁玉忠、莊文昇、黃呈明、曾文賓

1、設 a、b、c、d 為相異正數，且滿足下列二條件

(1) $a+d=b+c$ 。 (2) $\sqrt{a}-\sqrt{b}<\sqrt{c}-\sqrt{d}$ 。

試證：b，c 均介於 a，d 之間。

解：已知：$a+d=b+c$

$\sqrt{a}-\sqrt{b}<\sqrt{c}-\sqrt{d}\Rightarrow\sqrt{a}+\sqrt{d}<\sqrt{b}+\sqrt{c}\Rightarrow a+d+2\sqrt{ad}<b+c+2\sqrt{bc}$

$\Rightarrow\sqrt{ad}<\sqrt{bc}\Rightarrow ad<bc$

$(b-a)(b-d)=b^2-(a+d)b+ad<b^2-(b+c)b+bc=0$

$\Rightarrow$ b 介於 a，d 之間。 同理可證：c 介於 a，d 之間。

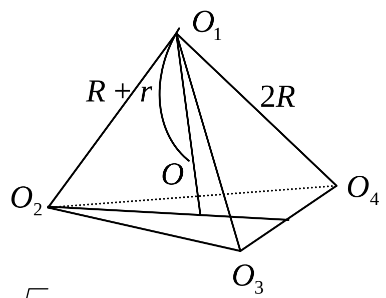
2、是否存在自然數 n，使得 $n^4+2n^3-n^2-2n+3$ 是某一自然數 k 的完全平方。

若有，則求出 n 、k 。 若沒有，則證明之。

解：沒有。 ∵任意自然數 k 的完全平方必為 $4t+1$ (奇數) 或 $4t$ (偶數) 之形式。

而 $n^4+2n^3-n^2-2n+3=(n-1)n(n+1)(n+2)+3=4t+3$ 之形式。

3、空間中，四個半徑均為 R 的球兩兩相外切，其中間有一半徑為 r 之小球，與此四球亦均相外切，試求：$\dfrac{r}{R}$ 之值。



解：如右圖：設四大球之球心分別為 O_1,O_2,O_3,O_4，小球之球心為 O，

於邊長為 $2R$ 正四面體 $O_1-O_2O_3O_4$ 中

其高為 $h=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\cdot 2R=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}R$

隨之，$R+r=\dfrac{3}{4}h=\dfrac{\sqrt{6}}{2}R$ $\Rightarrow r=\dfrac{\sqrt{6}-2}{2}R\Rightarrow\dfrac{r}{R}=\dfrac{\sqrt{6}-2}{2}$ 。

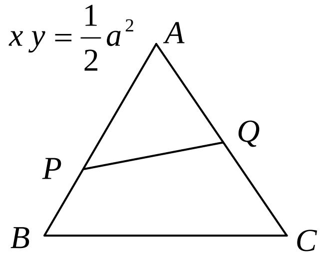
4、邊長為 a 的正三角形△ABC 中，P、Q 分別為 $\overline{AB},\overline{AC}$ 邊上之一點。

(1)若 $\overline{PQ}$ 平分△ABC 之面積，試求：$\overline{PQ}$ 之最小值。

(2)若 $\overline{PQ}$ 平分△ABC 之周長，試求：$\overline{PQ}$ 之最小值。

解：設 $\overline{AP}=x,\overline{AQ}=y$,

(1)由 $a\triangle APQ=\dfrac{1}{2}\ a\triangle ABC\Rightarrow\dfrac{1}{2}xy\sin A=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}a\cdot a\sin A\Rightarrow xy=\dfrac{1}{2}a^2$



$\overline{PQ}^2=x^2+y^2-2xy\cos 60^\circ=x^2+y^2-\dfrac{1}{2}a^2$

$\geq 2xy-\dfrac{1}{2}a^2=\dfrac{1}{2}a^2$ ，故 $\overline{PQ}\geq\dfrac{\sqrt{2}}{2}a\cdots\cdots$ 最小值。

(2) $\overline{PQ}$ 平分△ABC 之周長 $\Rightarrow x+y=\dfrac{3}{2}a$

$\overline{PQ}^2=x^2+y^2-xy=(x+y)^2-3xy\geq(x+y)^2-3(\dfrac{x+y}{2})^2=\dfrac{9}{16}a^2$

$\Rightarrow\overline{PQ}\geq\dfrac{3}{4}a\cdots\cdots$ 最小值。

5、(1)於自然數 x,y,z 與質數 p 中，

試證：滿足 $(x,y,z)=1,[x,y,z]=p^m$ 的序組共有 $6m$ 組。

(2)設 $a,b,c\in N$，滿足 $(a,b,c)=6,[a,b,c]=6!$ 的序組有多少組?

解：(1)集合 $\{x,y,z\}=\{p^0,P^t,p^m\}$，其中 $0\le t\le m$。

於 $t=0,t=m$ 時，(x,y,z) 各有 3 組解。

當 $0<t<m$ 時，(x,y,z) 均有 6 組解。

故共有 $3+3+6(m-1)=6m$ 組解。

(2) $\because \dfrac{6!}{6}=120=2^3\cdot 3^1\cdot 5^1$，故所求為 $(6\cdot 3)\cdot(6\cdot 1)\cdot(6\cdot 1)=648$ 組解。

6、空間中，P 為圓 $\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=10\end{cases}$ 上的動點：$A(-1,1,8),B(3,5,0)$，

若直線 PA 交 xy 平面上於 C 點，試求：$\overline{BC}$ 的軌跡圖形面積。

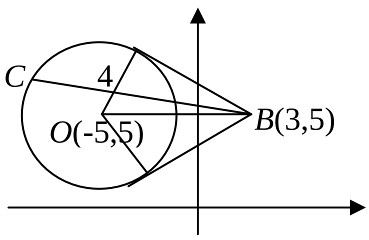
解：設 $P(\cos\theta,\sin\theta,10)$，則直線 PA 之參數方程式為 $\begin{cases}x=-1+(1+\cos\theta)\cdot t\\ y=1+(-1+\sin\theta)\cdot t\ ,t\in R\\ z=8+2t\end{cases}$

令 $z=0\Rightarrow t=-4$，此即：B 點之座標為

$(-5-4\cos\theta,5-4\sin\theta,0),0\le\theta\le 2\pi$

其軌跡方程式為 $(x+5)^2+(y-5)^2=16$

如右圖：



所求面積為 $4\times 4\sqrt{3}+\dfrac{2}{3}\times\pi\cdot 4^2=16\sqrt{3}+\dfrac{32}{3}\pi$。

7、設 n 為自然數，p 為正質數，若 $\sqrt{1-\dfrac{69}{p^n}}$ 為一有理數，試求：p 之值。

解：(1) n 為偶數，令 $n=2m$，$m\in N$，按題意：$\sqrt{1-\dfrac{69}{p^n}}=\sqrt{1-\dfrac{69}{p^{2m}}}=\dfrac{\sqrt{p^{2m}-69}}{p^m}\in Q$

$\Rightarrow\sqrt{p^{2m}-69}=k\in N,\Rightarrow p^{2m}-69=k^2\Rightarrow(p^m+k)(p^m-k)=69$

若 $\begin{cases}p^m+k=69\\ p^m-k=1\end{cases}\Rightarrow p^m=35=5\times 7$ 不合題意。

若 $\begin{cases}p^m+k=23\\ p^m-k=3\end{cases}\Rightarrow p^m=13,k=1$，此時 $p=13,k=1$，原數 $=\dfrac{10}{13}\in Q$。

(2) n 為奇數，令 $n=2m+1$，$m\in N\cup\{0\}$，按題意：

$\sqrt{1-\dfrac{69}{p^n}}=\sqrt{1-\dfrac{69}{p^{2m+1}}}=\dfrac{\sqrt{p(p^{2m+1}-69)}}{p^{m+1}}\in Q\Rightarrow p(p^{2m+1}-69)$ 為完全平方數

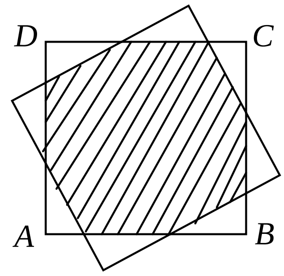
$\Rightarrow p\mid p^{2m+1}-69\Rightarrow p\mid 69\Rightarrow p=3,23$

若 $p=3$，$\Rightarrow\sqrt{3^{2m}-23}=k\in N\Rightarrow\begin{cases}3^m+k=23\\ 3^m-k=1\end{cases}\Rightarrow 3^m=12$ 不合理。

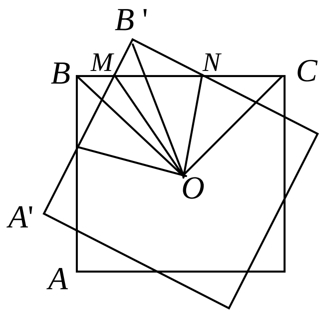
若 $p=23$，$\Rightarrow\sqrt{23^{2m}-3}=k\in N\Rightarrow\begin{cases}23^m+k=3\\ 23^m-k=1\end{cases}\Rightarrow 23^m=2$ 不合理。

綜合上述知：$p=13,m=1$，該數 $=\dfrac{10}{13}\in Q$。

8、邊長為 1 的正方形 $ABCD$，繞其中心 O 旋轉角 α ，$0° < \alpha < 90°$，試求旋轉後，兩正方形重疊部份之面積的最小值。



解：如右圖：設旋轉了 $\angle BOB' = \theta$ 角，$0 < \theta \le \dfrac{\pi}{4}$ 。



利用旋轉與對稱原理

$$\Rightarrow \angle BOM = \angle B'OM = \frac{\theta}{2},\ \angle CON = \angle B'ON = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}$$

隨之，$\angle MON = \dfrac{\pi}{4}$ ，而重疊部份 $S = 8\triangle MON$ 。

於$\triangle BOM$ 中，利用正弦定理

$$\frac{\overline{OM}}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\overline{OB}}{\sin(\frac{3\pi}{4} - \frac{\theta}{2})} \Rightarrow \overline{OM} = \frac{1}{2\sin(\frac{3\pi}{4} - \frac{\theta}{2})}$$

同理：於$\triangle B'ON$ 中，

$$\frac{\overline{ON}}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\overline{OB'}}{\sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2})} \Rightarrow \overline{ON} = \frac{1}{2\sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2})}$$

$$S = 8\triangle MON = 8 \times \frac{1}{2} \times \overline{OM} \times \overline{ON} \times \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2\sin(\frac{3\pi}{4} - \frac{\theta}{2}) \cdot \sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2})}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\cos(\frac{\pi}{4} - \theta) - \cos\frac{5\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{\cos(\frac{\pi}{4} - \theta) + \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

故當 $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ 時，S 有最小面積 $= \dfrac{\sqrt{2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \sqrt{2}(2 - \sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 2$ 。

9、是否存在正整數 a, b, c, d，使得 $ab = cd$ 且 $a + b + c + d$ 為質數？
若有，則求 a, b, c, d 。若沒有，則證明之。

解：不存在。

設$(a, c) = x \Rightarrow a = xy, c = xz, (y, z) = 1$.

$(b, d) = u \Rightarrow b = uv, d = uw, (v, w) = 1$.其中 $x, y, z, u, v, w \in N$ 。

由 $ab = cd \Rightarrow xyuv = xzuw \Rightarrow yv = zw$.

$\Rightarrow y \mid zw$ ，又 $(y, z) = 1 \Rightarrow y \mid w$ ，同理可得：$w \mid y$ ，故得 $y = w$。

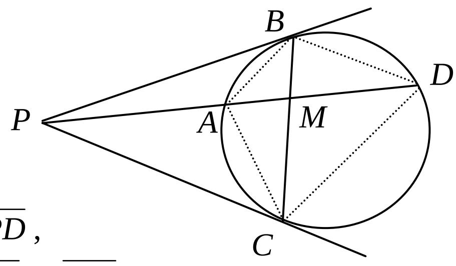
同法可得：$z = v$， 隨之： $a = xy, b = uz, c = xz, d = yu$,

$\Rightarrow a + b + c + d = xy + uz + xz + yu = (x + u)(y + z)$ 不是質數。

10、如右圖：$\overline{PB}\,,\overline{PC}$ 是圓 O 之二切線段，切點為 B，C

$\overline{PAD}$ 為任一割線，交圓 O 於 $A\,,D$ 二點，

交 $\overline{BC}$ 於 M 點，



試證：$\dfrac{1}{\overline{PA}}+\dfrac{1}{\overline{PD}}=\dfrac{2}{\overline{PM}}$ 。

解：連接 $\overline{AB}\,,\overline{AC}\,,\overline{CD}\,,\overline{BD}\,,$

由割線段性質 $\overline{PB}^2=\overline{PC}^2=\overline{PA}\times\overline{PD}\,,$

又 $\triangle PAB\sim\triangle PBD\Rightarrow\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PD}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BD}}.$

$\triangle PAC\sim\triangle PCD\Rightarrow\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PC}}=\dfrac{\overline{PC}}{\overline{PD}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CD}}.$

$$\Rightarrow\frac{\overline{AM}}{\overline{MD}}=\frac{a\Delta ABC}{a\Delta DBC}=\frac{\overline{AB}\times\overline{AC}}{\overline{DB}\times\overline{DC}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}}\times\frac{\overline{AC}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{PB}}{\overline{PD}}\times\frac{\overline{PC}}{\overline{PD}}=\frac{\overline{PB}^2}{\overline{PD}^2}$$

$$=\frac{\overline{PA}\times\overline{PD}}{\overline{PD}^2}=\frac{\overline{PA}}{\overline{PD}}\Rightarrow\frac{\overline{AM}}{\overline{PA}}=\frac{\overline{MD}}{\overline{PD}}.$$

隨之：$\dfrac{\overline{PM}}{\overline{PA}}+\dfrac{\overline{PM}}{\overline{PD}}=(\dfrac{\overline{AM}}{\overline{PA}}+1)+(1-\dfrac{\overline{MD}}{\overline{PD}})=2\Rightarrow\dfrac{1}{\overline{PA}}+\dfrac{1}{\overline{PD}}=\dfrac{2}{\overline{PM}}$ 。