省立台中一中員生社 合作盃數學競試

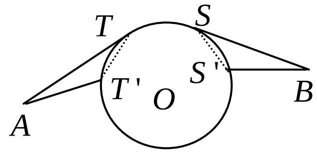
87 年度試題參考答案

提供教師:施能強、曾文賓、張宗榮

1.現有 A,B 二村莊且 A,B 二村莊間有一圓湖;已知 $A(-7,1),B(7,-1)$而圓湖方程式為 $x^2+y^2=25$,今欲在 A,B 二村莊間闢建一條公路,不准建橋,試問如何闢建方可使公路路徑最短?請說明理由並求此時公路路徑長為何?

解：過 A，B 分別做圓 O 之切線，切點為 T，S，

則 $\overline{AT}+\overset{\frown}{TS}+\overline{SB}$ 路徑最短。



理由：在圓 O 上任取另外二點 T'，S'，如圖：

$\Rightarrow \overline{AT'}+\overset{\frown}{T'S'}+\overline{S'B}=\overline{AT'}+\overset{\frown}{T'T}+\overset{\frown}{TS}+\overset{\frown}{SS'}+\overline{S'B}$

$>(\overline{AT'}+\overline{T'T})+\overset{\frown}{TS}+(\overline{SS'}+\overline{S'B})>\overline{AT}+\overset{\frown}{TS}+\overline{SB}$。

$\overline{AT}=\overline{BS}=\sqrt{7^2+(-1)^2-25}=5$。

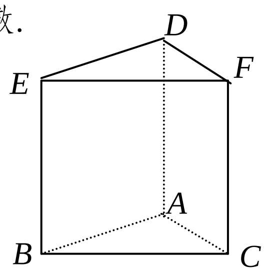
又點 A，B 對圓 O 之極線分別為：$-7x+y-25=0$ ； $7x-y-25=0$，

求出：$T(-3,4),S(4,3)\Rightarrow \overrightarrow{OT}\cdot\overrightarrow{OS}=0\Rightarrow \overline{OT}\perp\overline{OS}$，

故路徑最短為 $10+\dfrac{5\pi}{2}$。

2.正三角柱 $ABCFDE$(圖一)內部有有限個點其所成的集合為 S,若 S 在側面 $ABED,ACFD$投影所成集合分別為S_1,S_2又S在底面ABC投影所成集合為S_3,

求證:$|S|^2\le|S_1|\cdot|S_2|\cdot|S_3|$。 其中$|S|$表 S 之元素個數.



解：設 $|S|=n\in N$ ，利用數學歸納法證明之。

(1)$n=1\Rightarrow|S|=|S_1|=|S_2|=|S_3|=1.$

$\Rightarrow|S|^2=|S_1|\cdot|S_2|\cdot|S_3|=1.$

(2) $n=2$ 時，兩點為 A,B；

若 $\overline{AB}\perp$ 某一平面 E_1，$\Rightarrow|S|=2,|S_1|=1,|S_2|=|S_3|=2$，

$\Rightarrow|S|^2=|S_1|\cdot|S_2|\cdot|S_3|=4.$

若 $\overline{AB}$ 不垂直任一平面，$\Rightarrow|S|=|S_1|=|S_2|=|S_3|=2$，

$\Rightarrow|S|^2=4<|S_1|\cdot|S_2|\cdot|S_3|=8.$

(3)設 $n=1,2,3,\cdots,k$ 時，$|S|^2\le|S_1|\cdot|S_2|\cdot|S_3|$ 成立，

今 $n=k+1$ 時，必可找到垂直指定之二平面之平面 E，將 S 分割為二部份 P,Q ， 其中 $|S|=|P|+|Q|=k+1,|P|\le k,|Q|\le k$ 。

又 P、Q 在三平面之投影分別為 $a_1,a_2;b_1,b_2;c_1,c_2$；

其中 $|S_1|=a=a_1+a_2$,$|S_2|=b=b_1+b_2$,$|S_3|=c\le c_1+c_2$, $c_1,c_2\le c$,

$|P|\le k,|Q|\le k\Rightarrow|P|^2\le a_1b_1c_1$；$|Q|^2\le a_2b_2c_2$.

$|S|^2=(|P|+|Q|)^2\le(\sqrt{a_1b_1c_1}+\sqrt{a_2b_2c_2})^2\le(\sqrt{a_1b_1c}+\sqrt{a_2b_2c})^2$

$=c(\sqrt{a_1b_1}+\sqrt{a_2b_2})^2\le c(a_1+a_2)(b_1+b_2)=abc=|S_1|\cdot|S_2|\cdot|S_3|$

由數學歸納法第二原理知：此定理成立。

3.設 $x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\in R^+$,若 $\dfrac{1}{1+x_1^{\ 2}}+\dfrac{1}{1+x_2^{\ 2}}+\dfrac{1}{1+x_3^{\ 2}}+\dfrac{1}{1+x_4^{\ 2}}+\dfrac{1}{1+x_5^{\ 2}}=1$,

求證：$x_1\,x_2\,x_3\,x_4\,x_5\ge 32$.

解：令 $\dfrac{1}{1+x_i^{\ 2}}=a_i\Rightarrow x_i^{\ 2}=\dfrac{1-a_i}{a_i}$, $\forall i=1,2,3,4,5$.

由 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=1\Rightarrow x_1^{\ 2}=\dfrac{a_2+a_3+a_4+a_5}{a_1}\ge\dfrac{4\cdot\sqrt[4]{a_2a_3a_4a_5}}{a_1}$, 隨之

$$x_1^{\ 2}\,x_2^{\ 2}\,x_3^{\ 2}\,x_4^{\ 2}\,x_5^{\ 2}$$

$$\ge\frac{4\cdot\sqrt[4]{a_2a_3a_4a_5}}{a_1}\cdot\frac{4\cdot\sqrt[4]{a_1a_3a_4a_5}}{a_2}\cdot\frac{4\cdot\sqrt[4]{a_1a_2a_4a_5}}{a_3}\cdot\frac{4\cdot\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_5}}{a_4}\cdot\frac{4\cdot\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}}{a_5}\ge 4^5,$$

$\therefore x_1\,x_2\,x_3\,x_4\,x_5\ge 2^5=32$.

4.三數 $2,\sqrt{6},\dfrac{9}{2}$ 可否為同一等差數列之項? 又可否為同一等比數列之項?

試說明您的理由.

解：(1)若可為同一等差數列之項，不妨假設公差為 d,

$\sqrt{6}=2+(k-1)d$; $\dfrac{9}{2}=2+(p-1)d$, $k,p\in N$.

$\Rightarrow\dfrac{\sqrt{6}-2}{k-1}=d=\dfrac{5}{2(p-1)}\Rightarrow\sqrt{6}-2=\dfrac{5(k-1)}{2(p-1)}$ 顯然不合理.

(2)若可為同一等比數列之項，不妨假設公比為 r,

$\sqrt{6}=2\cdot r^{k-1}$; $\dfrac{9}{2}=2\cdot r^{p-1}$, $k,p\in N$.

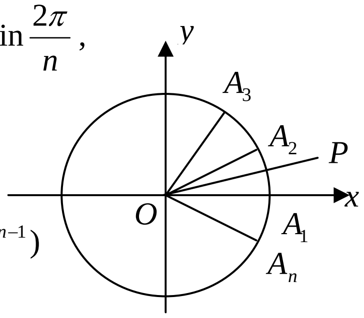
$\Rightarrow(\dfrac{\sqrt{6}}{2})^{p-1}=r^{(k-1)(p-1)}=(\dfrac{9}{4})^{k-1}\Rightarrow(\sqrt{\dfrac{3}{2}})^{p-1}=(\sqrt{\dfrac{3}{2}})^{4(k-1)}$,

$\Rightarrow p-1=4(k-1)$, 取 $k=2$ 時 , $p=5$, 即可為同一等比數列之項.

5.設 $A_1,A_2,A_3,\cdots\cdots A_n$ 為內接於中心 O 半徑 r 之圓內接正 n 邊形的頂點,

P 在 $\angle A_1OA_2$ 分角線上,若 $\overline{OP}=R,R>r$ 求 $\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}\cdots\cdots\overline{PA_n}=?$(以 R,r 表之).

解：於複數平面上，$A_i(r\,w^{i-1})$, $w=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$,



$P(R\alpha)$, $\alpha=\cos\dfrac{\pi}{n}+i\sin\dfrac{\pi}{n}$, $\alpha^n=-1$,

$\overline{PA_i}=\left|R\alpha-r\,w^{i-1}\right|$, $i=1,2,\cdots,n$.

$x^n-r^n=(x-r)(x-r\,w)(x-r\,w^2)\cdots(x-r\,w^{n-1})$

令 $x=R\alpha$

$\Rightarrow -R^n-r^n=(R\alpha-r)(R\alpha-r\,w)(R\alpha-r\,w^2)\cdots(R\alpha-r\,w^{n-1})$,

取絕對值 , $\Rightarrow\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}\cdot\overline{PA_3}\cdots\cdots\overline{PA_n}=R^n+r^n$.

6.設 a_n 爲$1+2+3+4+\cdots\cdots+n$之個位數字, $n=1,2,3,\cdots$

求證: $0.a_1a_2a_3\cdots a_n\cdots$為一有理數。

解：只需證明它是循環小數即可。

觀察 a_n 的變化規律，列表如下：

$n=$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a_n	1	3	6	0	5	1	8	6	5	5	6	8	1	5	0	6	3	1	0	0

以下證明：$a_{n+20}=a_n$, $\forall n\in N$.

$$1+2+\cdots+(n+20)-(1+2+\cdots+n)=\frac{1}{2}(n+20)(n+21)-\frac{1}{2}n(n+1)=20n+210$$

是 10 之倍數，$\therefore a_{n+20}=a_n$, $\forall n\in N$.

7.解方程式: $(1+x^2+x^4+\cdots+x^{40})(1+x^2+x^4+\cdots+x^{60})=1+x^2+x^4+\cdots+x^{50}$ 。

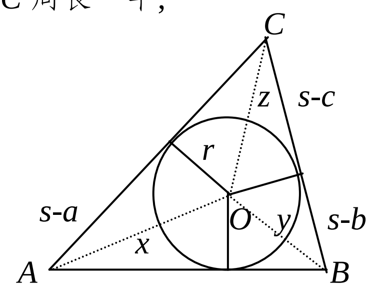
解：(1) $x=\pm1\Rightarrow 21\cdot31\neq26^2$. 不合理。

(2) $x\neq\pm1\Rightarrow \dfrac{x^{42}-1}{x^2-1}\cdot\dfrac{x^{62}-1}{x^2-1}=(\dfrac{x^{52}-1}{x^2-1})^2\Rightarrow x^{62}-2x^{52}+x^{42}=0$,

$\Rightarrow x=0$; $x^{10}=1\Rightarrow x=0$, w^k , $k=0,1,\cdots,9$. $w=\cos\dfrac{\pi}{5}+i\sin\dfrac{\pi}{5}$.

8.任意△ABC(圖二) , r 表其內切圓半徑, s 表△ABC 周長一半,

求證: $3r^2(\csc^2\dfrac{A}{2}+\csc^2\dfrac{B}{2}+\csc^2\dfrac{C}{2})\geq 9r^2+s^2$.



解：$\sin\dfrac{A}{2}=\dfrac{r}{x}\Rightarrow\csc^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{x^2}{r^2}$,

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow 3r^2(\csc^2\frac{A}{2}+\csc^2\frac{B}{2}+\csc^2\frac{C}{2})\\
&=3(x^2+y^2+z^2)\\
&=3(r^2+(s-a)^2+r^2+(s-b)^2+r^2+(s-c)^2)\\
&=9r^2+3((s-a)^2+(s-b)^2+(s-c)^2)\geq 9r^2+((s-a)+(s-b)+(s-c))^2\\
&=9r^2+s^2 .
\end{aligned}$$

9.求滿足下列二條件之實數值函數 $f(x)$, $x\in R^+$

(1) $f(xy)=f(x)f(\dfrac{2}{y})+f(y)f(\dfrac{2}{x})$其中$x,y\in R^+$ (2) $f(1)=\dfrac{1}{2}$.

解：$x=y=1\Rightarrow f(1)=f(1)f(2)+f(1)f(2)=2f(1)f(2)\Rightarrow f(2)=\dfrac{1}{2}$.

$$f(x)=f(x\cdot1)=f(x)f(2)+f(1)f(\frac{2}{x})=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(\frac{2}{x})\Rightarrow f(x)=f(\frac{2}{x}).$$

$$f(2)=f(x\cdot\frac{2}{x})=f(x)f(x)+f(\frac{2}{x})f(\frac{2}{x})=2(f(x))^2\Rightarrow(f(x))^2=\frac{1}{4}.$$

$$f(x)=f(\sqrt{x}\cdot\sqrt{x})=2(f(\sqrt{x}))^2=2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$