台灣省立台中一中 合作盃數學金頭腦

第九次有獎徵答

收稿時間:88 年 10 月 20 日~ 88 年 10 月 22 日 16 時

1. 定義：$w(1,2)=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1\cdot 2}$ ，$w(1,2,3)=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}$

若 $n\in N$ 求證：$w(1,2,3,...,n)=n$ 。

＜證明＞

＜方法一＞利用數學歸納法

＜方法二＞考慮 $p=(1+\frac{1}{1})(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})......(1+\frac{1}{n})$

$$=1+(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+......+\frac{1}{n})+(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 3}+......+\frac{1}{(n-1)\cdot n})+......+\frac{1}{n\,!}$$

$$=1+w(1,2,3,\ldots..,n)$$

$$\therefore\ w(1,2,3,\ldots..,n)=\ p-1=\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{n+1}{n}-1=(n+1)-1=n$$

＜方法三＞考慮多項式 $f(x)=(x+\frac{1}{1})(x+\frac{1}{2})(x+\frac{1}{3})\cdots(x+\frac{1}{n})$

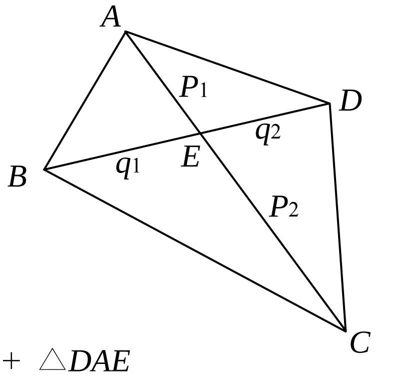
$$=x^n+(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n})x^{n-1}+(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 3}+...+\frac{1}{1\cdot n})x^{n-2}+......+\frac{1}{n\,!}$$

令 $x=1$ 則 $f(1)=1+w(1,2,3,...,n)$

$$\therefore\ w(1,2,3,...,n)=f(1)-1=(1+\frac{1}{1})(1+\frac{1}{2})\cdots(1+\frac{1}{n})-1=\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{n+1}{n}-1=n$$

2. 設凸四邊形 $ABCD$ 的面積為 1，

求證四邊形 $ABCD$ 的兩對角線長之和不小於 $2\sqrt{2}$ 。



＜證明＞(1)設二對角線 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 交於 E,

令 $\overline{AC}=p$, $\overline{BD}=q$,

且 $\overline{AE}=p_1$, $\overline{CE}=p_2$, $\overline{BE}=q_1$, $\overline{DE}=q_2$

則 $p_1+p_2=p$, $q_1+q_2=q$

(2) 設二對角線 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 之夾角為 θ 及 $\pi-\theta$

則□$ABCD$ 之面積=△ABE+ △BCE+ △CDE+ △DAE

$$=\frac{1}{2}p_1q_1\sin\theta+\frac{1}{2}p_2q_1\sin(\pi-\theta)+\frac{1}{2}p_2q_2\sin\theta+\frac{1}{2}p_1q_2\sin(\pi-\theta)$$

$$=\frac{1}{2}p_1q_1\sin\theta+\frac{1}{2}p_2q_1\sin\theta+\frac{1}{2}p_2q_2\sin\theta+\frac{1}{2}p_1q_2\sin\theta\ =\frac{1}{2}(p_1q_1+p_2q_1+p_2q_2+p_1q_2)\sin\theta$$

$\le \frac{1}{2}(p_1q_1 + p_2q_1 + p_2q_2 + p_1q_2) = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)(q_1 + q_2) = \frac{1}{2}pq$

$\therefore\ 2 \le pq$ ………(a)

(3)由 $A.M. \geqq G.P.$ 知 $\frac{p+q}{2} \ge \sqrt{pq} \quad \Rightarrow \quad (p+q)^2 \ge 4pq$ …………(b)

由(a),(b)得 $(p+q)^2 \ge 8 \quad \Rightarrow \quad p+q \ge 2\sqrt{2}$

3.數列 $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$；已知 $a_1 = a_2 = 1$，$a_{k+2} = a_{k+1} + a_k$ (k=1,2,3,….)

試證： a_{4n} ($n = 1,2,3,….$)恆為 3 的倍數。

＜證明＞由已知 $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = a_1 + a_2 = 2$, $a_4 = a_2 + a_3 = 3$ 是 3 的倍數

令 A_n 表命題『a_{4n} 是 3 的倍數』則因 a_4 是 3 的倍數 $\therefore A_1$ 成立

設 A_k 成立，即 a_{4k} 是 3 的倍數，則 $a_{4(k+1)} = a_{4k+3} + a_{4k+2} = (a_{4k+2} + a_{4k+1}) + a_{4k+2}$

$= 2(a_{4k+2}) + a_{4k+1} = 3a_{4k+1} + 2a_{4k}$ 是 3 的倍數

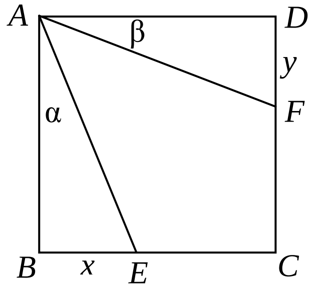
即當 $n = k$ 時命題成立,推得 $n = k+1$ 時命題成立

根據數學歸納法知 $\forall\, n \in N$, A_n 恆成立，即 a_{4n} 恆為 3 的倍數

4.正方形 $ABCD$ 中 ，E , F 各為 $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ 邊上的點，若 $\angle EAF = 45°$

試證：$\overline{EF} = \overline{BE} + \overline{DF}$ 。

＜證明＞設邊長為 a , $\overline{BE} = x$, $\overline{DF} = y$, $\angle BAE = \alpha$, $\angle DAF = \beta$



則 $\alpha + \beta = 45°$

$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta} = 1$

$\Rightarrow \quad \tan\alpha + \tan\beta = 1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta$

$\Rightarrow \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1 - \frac{x}{a} \cdot \frac{y}{a} \quad \Rightarrow \quad a^2 - (x+y) \cdot a = xy$

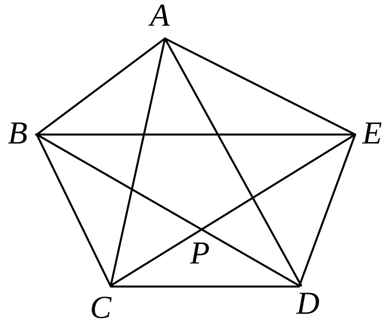
$\Rightarrow \overline{EF}^2 = (a-x)^2 + (a-y)^2 = 2a^2 - 2(x+y)a + x^2 + y^2 = 2xy + x^2 + y^2 = (x+y)^2$

$\Rightarrow \overline{EF} = \overline{BE} + \overline{DF}$

5.凸五邊形 $ABCDE$，

已知 $a\triangle ABC = a\triangle BCD = a\triangle CDE = a\triangle DEA = a\triangle EAB = 400$

求凸五邊形 $ABCDE$ 之面積。



＜解＞(1) $\because\ a\triangle BCD = a\triangle ECD\ \therefore \overline{BE} \parallel \overline{CD}$

同理 $\overline{BD} \parallel \overline{AE}$ ， $\overline{CE} \parallel \overline{AB}$ ， $\overline{DA} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$

(2) $\square ABPE$ 為平行四邊形

$\therefore\ a\triangle BEP = a\triangle ABE = 400$ (設 $\overline{BD}, \overline{CE}$ 交於 P)

(3) 設 $a\triangle CPD = x$ 則 $a\triangle BCP = 400 - x = a\triangle DPE$

$$\frac{BP}{DP} = \frac{a\Delta BCP}{a\Delta DCP} = \frac{a\Delta BPE}{a\Delta DPE}\ \therefore\ \frac{400-x}{x} = \frac{400}{400-x} \Rightarrow x^2 - 800x + 160000 = 400x$$

$$\Rightarrow\ x^2 - 1200x + 360000 = 20000\ \Rightarrow\ (x-600)^2 = (200\sqrt{5})^2$$

又 $x - 600 < 0\ \therefore\ x = 600 - 200\sqrt{5}$

(4) 所求面積 $= a\triangle ABE + a\triangle BPE + a\triangle BCD + a\triangle PDE$

$= 400 + 400 + 400 + (400 - x) = 1600 - x\ =\ 1000 + 200\sqrt{5}$