

台灣省立台中一中 合作盃數學金頭腦

第八次有獎徵答

收稿時間:88年6月11日~88年6月15日

1. 設 n 為自然數, a, b, c 為實數, 且 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$

求證: $\frac{1}{a^{2n+1}} + \frac{1}{b^{2n+1}} + \frac{1}{c^{2n+1}} = \frac{1}{a^{2n+1} + b^{2n+1} + c^{2n+1}}$ 。

2. 在空間中, 由一點 P 向不同方向作出四條相異線段, 若其中任意兩線段的夾角均為 θ , 求 $\tan \theta$ 之值。

3. 用尺規作圖法, 作一直角三角形, 使其斜邊長為 a 且有兩條中線互相垂直。(請簡要寫出作法並加以證明)

4. 給一凸六邊形 $ABCDEF$, 已知 $\overline{AB} = \overline{BC}$, $\overline{CD} = \overline{DE}$, $\overline{EF} = \overline{FA}$ 且 $\angle ABC = \angle CDE = \angle EFA = 120^\circ$, 試證: $\triangle BDF$ 為正三角形。

5. 銳角三角形 ABC , 其外接圓的圓心 O , 半徑 R , 內切圓的半徑 r , 若 O 到三邊 \overline{BC} , \overline{CA} , \overline{AB} 的距離分別為 d_1, d_2, d_3

求證: $d_1 + d_2 + d_3 = R + r$