台灣省立台中一中 合作盃數學金頭腦

第七次有獎徵答參考答案

1. 設 $x \in R$, $f(x)$ 是以 2 為周期之偶函數 (即 $\forall\, x \in R$, $f(x+2)=f(x)$, $f(-x)=f(x)$)

   當 $0 \le x \le 1$ 時， $f(x)=x^{\frac{1}{1998}}$ ，試比較 $f(\frac{98}{19})$, $f(\frac{101}{17})$, $f(\frac{104}{15})$ 之大小.

   「解」根據已知條件可得

   $$f(\frac{98}{19})=f(-\frac{16}{19}+6)=f(-\frac{16}{19})=f(\frac{16}{19})=(\frac{16}{19})^{\frac{1}{1998}}$$

   $$f(\frac{101}{17})=f(-\frac{1}{17}+6)=f(-\frac{1}{17})=f(\frac{1}{17})=(\frac{1}{17})^{\frac{1}{1998}}$$

   $$f(\frac{104}{15})=f(\frac{14}{15}+6)=f(\frac{14}{15})=(\frac{14}{15})^{\frac{1}{1998}}$$

   $$\because \frac{1}{17}<\frac{16}{19}<\frac{14}{15} \quad \therefore (\frac{1}{17})^{\frac{1}{1998}}<(\frac{16}{19})^{\frac{1}{1998}}<(\frac{14}{15})^{\frac{1}{1998}}$$

   即 $f(\frac{101}{17})<f(\frac{98}{19})<f(\frac{104}{15})$

2. 數列 $<a_n>$ 滿足 $0<a_1<1$ 且 $a_n{}^3-7a_{n+1}+6=0 \quad \forall\, n \ge 1$，試證：$<a_n>$ 收斂.

   「證明」想法：證明 $<a_n>$ 有界且單調(遞增或遞減)

   (1) 1°. $0<a_1<1$

   2°. 設 $0<a_n<1$ 則

   $$\because a_n{}^3-7a_{n+1}+6=0 \quad \therefore 7a_{n+1}=a_n{}^3+6$$

   $$a_{n+1}=\frac{1}{7}(a_n{}^3+6)<\frac{1}{7}(1^3+6)=1$$

   $$\therefore 0<a_{n+1}<1$$

   由數學歸納法知,$<a_n>$ 有上界 1 ,且 $0<a_n<1$, $\forall\, n \in N$

   (2) $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{7}(a_n{}^3+6)-a_n=\frac{1}{7}(a_n{}^3-a_n+6)=\frac{1}{7}(a_n-1)(a_n-2)(a_n+3)>0$

   $\therefore a_{n+1}>a_n$ 即 $<a_n>$ 是遞增數列

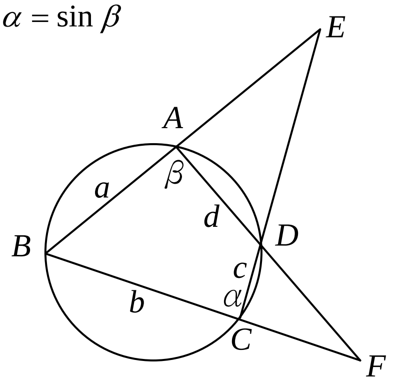
   由 (1) , (2) 知數列 $<a_n>$ 收斂.

3. 如圖，圓內接四邊形 $ABCD$ 中 $\overline{BA}$, $\overline{CD}$ 之延長線交於 E，

   $\overline{BC}$, $\overline{AD}$ 之延長線交於 F，且 $\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$, $\overline{CD}=c$, $\overline{DA}=d$ ，

   求證：$\sin\angle E : \sin\angle F=(b^2-d^2):(a^2-c^2)$

「證明一」令 $\angle BCD=\alpha$, $\angle BAD=\beta$,則 $\alpha+\beta=180^\circ \Rightarrow \sin\alpha=\sin\beta$



$\because \angle B=\angle ADE$, $\alpha=\angle DAE$

$\therefore \triangle ADE$ 中 $\dfrac{d}{\sin\angle E}=\dfrac{\overline{DE}}{\sin\alpha}=\dfrac{\overline{AE}}{\sin\angle B}$

$\therefore$ $\overline{DE}=\dfrac{d\sin\alpha}{\sin\angle E}$, $\overline{AE}=\dfrac{d\sin\angle B}{\sin\angle E}$

又 $\triangle BCE$ 中, $\dfrac{b}{\sin\angle E}=\dfrac{\overline{DE}+c}{\sin\angle B}=\dfrac{\overline{AE}+a}{\sin\alpha}$

$\therefore b\sin\angle B=\overline{DE}\sin\angle E+c\sin\angle E=d\sin\alpha+c\sin\angle E$ ……(1)

$b\sin\alpha=\overline{AE}\sin\angle E+a\sin\angle E=d\sin\angle B+a\sin\angle E$ …….(2)

(1) + (2) 得 $(b-d)(\sin\angle B+\sin\alpha)=(a+c)\sin\angle E$

$\therefore \sin\angle E=\dfrac{b-d}{a+c}(\sin\angle B+\sin\alpha)$

同理,在 $\triangle DCF$ 與 $\triangle ABF$ 中,可得

$a\sin\angle B=d\sin\angle F+c\sin\beta$ ………..(3)

$a\sin\beta=c\ \sin\angle B+b\sin\angle F$ ………..(4)

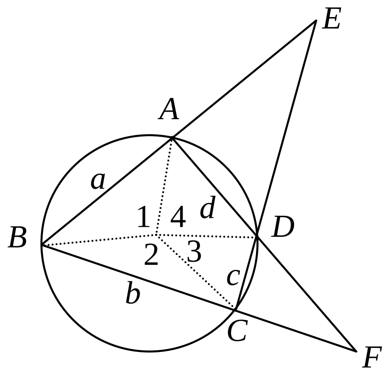
(3) + (4) 得 $(a-c)(\sin\angle B+\sin\beta)=(b+d)\sin\angle F$

$\therefore \sin\angle F=\dfrac{a-c}{b+d}(\sin\angle B+\sin\beta)$

故 $\sin\angle E:\sin\angle F=\dfrac{b-d}{a+c}(\sin\angle B+\sin\alpha):\dfrac{a-c}{b+d}(\sin\angle B+\sin\beta)$

$=\dfrac{b-d}{a+c}:\dfrac{a-c}{b+d}$ ($\because \sin\alpha=\sin\beta$)

$=(b^2-d^2):(a^2-c^2)$



3.「證明二」設圓的直徑為 R

$b^2-d^2=(R\sin\frac{1}{2}\angle 2)^2-(R\sin\frac{1}{2}\angle 4)^2$

$=R^2(\sin^2\frac{1}{2}\angle 2-\sin^2\frac{1}{2}\angle 4)=R^2\sin\dfrac{\angle 2+\angle 4}{2}\sin\dfrac{\angle 2-\angle 4}{2}$

同理 $a^2-c^2=R^2\sin\dfrac{\angle 1+\angle 3}{2}\sin\dfrac{\angle 1-\angle 3}{2}$

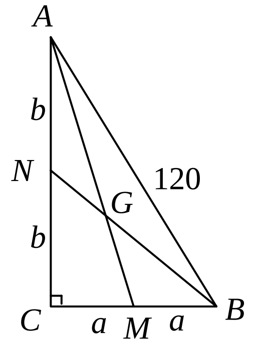
又 $\frac{1}{2}(\angle 1+\angle 3)+\frac{1}{2}(\angle 2+\angle 4)=180^\circ \Rightarrow \sin\dfrac{\angle 1+\angle 3}{2}=\sin\dfrac{\angle 2+\angle 4}{2}$

$\therefore (b^2-d^2):(a^2-c^2)=\sin\dfrac{\angle 2-\angle 4}{2}:\sin\dfrac{\angle 1-\angle 3}{2}=\sin\angle E:\sin\angle F$

4. 坐標平面上，$\triangle ABC$ 為直角三角形，且 $\angle C = 90°$, $\overline{AB} = 120$

$\overline{AC}$ 上的中線方程式為 $y = 3x$，$\overline{BC}$ 上的中線方程式為 $y + 2x = 0$，

求$\triangle ABC$ 的面積.



「解一」設直線 $y = 3x$ 與 $y = -2x$ 的交點 G,交角 θ ,

法向量 $\overrightarrow{n_1} = (3,-1)$ ，$\overrightarrow{n_2} = (2,1)$

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|} = \frac{6-1}{\sqrt{10}\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \therefore \angle AGB = 135°$$

如圖, $(2a)^2 + (2b)^2 = 120^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 3600$ …….(1)

$\overline{AG} = \frac{2}{3}\sqrt{(2b)^2 + a^2}$ ，$\overline{BG} = \frac{2}{3}\sqrt{(2a)^2 + b^2}$

$\triangle AGB$ 中

$$\left(\frac{2}{3}\sqrt{(2b)^2 + a^2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\sqrt{(2a)^2 + b^2}\right)^2 - 2\cos 135°\cdot\frac{2}{3}\sqrt{4b^2 + a^2}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{4a^2 + b^2} = 120^2$$

$\therefore \frac{5a^2 + 5b^2}{9} + \frac{\sqrt{2}}{9}\sqrt{4a^4 + 4b^4 + 17a^2b^2} = 3600$ ………(2)

$(1)-(2) \quad \frac{4}{9}(a^2 + b^2) = \frac{\sqrt{2}}{9}\sqrt{4a^4 + 4b^4 + 17a^2b^2}$

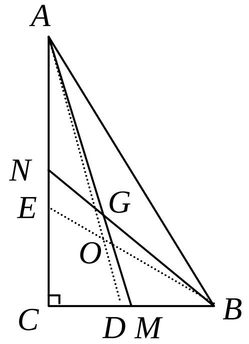
$\Rightarrow 8a^4 - 2a^2b^2 + 8b^4 = 0 \Rightarrow$ a , b 無實數解

$\therefore$此題無解

4.「解二」設直線 $y = 3x$ 與 $y = -2x$ 的交角 θ , 交點 G(重心)

$\tan\theta = \frac{\pm(3-(-2))}{1+3(-2)} = \pm\frac{5}{-5} = \mp 1 \quad \therefore \ \angle AGB = 135°$ …..(1)

設 O 為$\triangle ABC$ 的內心



則 $\angle AOB = 180° - \frac{1}{2}(\angle CAB + \angle CBA) = 135°$

又 $\frac{\overline{CD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} < 1 \quad \therefore \overline{CD} < \overline{DB}$

知 $\overline{BC}$ 之中點 M , 必 $C - D - M - B$

同理 $A - N - E - C$

$\therefore \angle AGB > \angle AOB = 135°$ …….(2)

由 (1) (2) 知$\triangle ABC$ 不存在

『註：若二中線的銳夾角 θ 滿足 $\tan\theta \le \frac{1}{3}$ 則本題有解』

5. 實數 x , y 滿足 $x^2+xy+y^2=3(x+y+3)$，求 x^2+y^2 之最大值與最小值.

「解」令 $x+y=u$, $xy=v$ 則

$$x^2+xy+y^2=3(x+y+3)\Rightarrow(x+y)^2-xy=3(x+y+3)$$

$$\Rightarrow u^2-v=3(u+3)\Rightarrow v=u^2-3u-9\,\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\therefore x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=u^2-2v=u^2-2(u^2-3u-9)$$

$$=-u^6+6u+18=-(u-3)^2+27\,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(2)$$

又 x , y 為二次方程式 $t^2-ut+v=0$ 的兩個實根

判別式 $D=u^2-4v\geq 0\,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$

(1)代入(3) $u^2-4(u^2-3u-9)\geq 0\Rightarrow u^2-4u-12\leq 0$

$$\therefore(u+2)(u-6)\leq 0\Rightarrow -2\leq u\leq 6\,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

由(2) , (4) 知

當 $u=3$ 時 ， x^2+y^2 有最大值 27

當 $u=-2$ 時 ， x^2+y^2 有最小值 2