

台灣省立台中一中 合作盃數學金頭腦

第七次有獎徵答

收稿時間:88年3月15日~88年3月20日上午10時

1. 設 $x \in R$, $f(x)$ 是以 2 為周期之偶函數 (即 $\forall x \in R, f(x+2) = f(x), f(-x) = f(x)$)

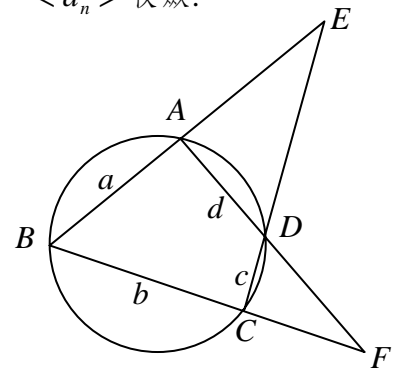
當 $0 \leq x \leq 1$ 時, $f(x) = x^{\frac{1}{1998}}$, 試比較 $f(\frac{98}{19})$, $f(\frac{101}{17})$, $f(\frac{104}{15})$ 之大小.

2. 數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $0 < a_1 < 1$ 且 $a_n^3 - 7a_{n+1} + 6 = 0 \quad \forall n \geq 1$, 試證: $\langle a_n \rangle$ 收斂.

3. 如圖, 圓內接四邊形 $ABCD$ 中 $\overline{BA}, \overline{CD}$ 之延長線交於 E ,

$\overline{BC}, \overline{AD}$ 之延長線交於 F , 且 $\overline{AB} = a, \overline{BC} = b, \overline{CD} = c, \overline{DA} = d$,

求證: $\sin \angle E : \sin \angle F = (b^2 - d^2) : (a^2 - c^2)$



4. 坐標平面上, $\triangle ABC$ 為直角三角形, 且 $\angle C = 90^\circ, \overline{AB} = 120$

\overline{AC} 上的中線方程式為 $y = 3x$, \overline{BC} 上的中線方程式為 $y + 2x = 0$,

求 $\triangle ABC$ 的面積.

5. 實數 x, y 滿足 $x^2 + xy + y^2 = 3(x + y + 3)$, 求 $x^2 + y^2$ 之最大值與最小值.