國 立 台 中 一 中 合 作 盃 數 學 金 頭 腦

第五十二次有獎徵答

收稿時間：99 年 5 月 19 日　~　99 年 5 月 21 日 14：00

說明：(1)解答請寫在答案稿紙上，並務必註明「**交件時間**」、「**班級**」、「**姓名**」。
(2)稿件寫完請投入敬業樓一樓**數學科辦公室**外**銀色的有獎徵答收稿信箱**內。
(3)答案稿紙可至數學科辦公室索取，**一張答案稿紙只能寫一個題目**的解答，如欲投稿兩題以上，請分別寫在不同的答案稿紙，否則不予評閱。
(4)答案稿紙上須註明投稿時間，投稿前**須請數學科任一位老師在投稿時間上簽證**否則視為當日最晚時間繳交。

1.已知 $m,n\in N$ 且 $m^2<7n^2$，求 $7n^2-m^2$ 的最小值？

解：

因為 7 整除 $7n^2$　所以 m^2 除以 7 的餘數為 $0,1,2,4$

又 $7n^2-m^2>0$

所以 $7n^2-m^2$ 除以 7 的餘數可能為 $6,5,3$

因此 $7n^2-m^2\geq 3$

取 $n=1$，$m=2$

所以 $7n^2-m^2=3$

最小值為 3

2.當 $x, y, z \in R^{+}$，且 $x+y+z=1$ 時，$\frac{99}{x}+\frac{5}{y}+\frac{19}{z} \geq k$ 恆成立，則 k 的最大值為何？

解：

$$\because \frac{99}{x}+\frac{5}{y}+\frac{19}{z} \geq k$$

$$=\frac{99}{x}(x+y+z)+\frac{5}{y}(x+y+z)+\frac{19}{z}(x+y+z)$$

$$=123+\frac{99y}{x}+\frac{5x}{y}+\frac{99z}{x}+\frac{19x}{z}+\frac{5z}{y}+\frac{19y}{z}$$

$$\geq 123+6\sqrt{55}+6\sqrt{209}+2\sqrt{95} \geq k$$

$\therefore k$ 的最大值是 $123+6\sqrt{55}+6\sqrt{209}+2\sqrt{95}$

3. 求內接於拋物線 $y^2=4cx\ (c>0)$ 的正三角形的中心的軌跡方程式？

解：

設三頂點座標 $P_i(ct_i^2,2ct_i)\ (i=1,2,3)$ ，中心 P 的座標為 $x=\dfrac{1}{3}c(t_1^2+t_2^2+t_3^2),\ y=\dfrac{2}{3}c(t_1+t_2+t_3)$

$\because \overline{P_1P_2}=\overline{P_1P_3}\Rightarrow[c(t_1^2-t_2^2)]^2+[2c(t_1-t_2)]^2=[c(t_1^2-t_3^2)]^2+[2c(t_1-t_3)]^2$

$\Rightarrow(t_1^2-t_2^2)^2-(t_1^2-t_3^2)^2=4[(t_1-t_3)^2-(t_1-t_2)^2]\Rightarrow(2t_1^2-t_2^2-t_3^2)(t_3^2-t_2^2)=4(2t_1-t_2-t_3)(t_2-t_3)$

$\Rightarrow(2t_1^2-t_2^2-t_3^2)(t_2+t_3)=-4(2t_1-t_2-t_3)\Rightarrow(3t_1^2-\dfrac{3x}{c})(\dfrac{3y}{2c}-t_1)=-4(3t_1-\dfrac{3y}{2c})$

$\Rightarrow 3t_1^3-3(\dfrac{3y}{2c})t_1^2-(\dfrac{3x}{c}+12)t_1+(\dfrac{9xy}{2c^2}+\dfrac{12y}{2c})=0\Rightarrow t_1^3-(\dfrac{3y}{2c})t_1^2-(\dfrac{x}{c}+4)t_1+(\dfrac{3xy}{2c^2}+\dfrac{4y}{2c})=0$

由對稱性知 t_1,t_2,t_3 為方程式 $t^3-(\dfrac{3y}{2c})t^2-(\dfrac{x}{c}+4)t+(\dfrac{3xy}{2c^2}+\dfrac{4y}{2c})=0$ 的三根，

由 $(t_1^2+t_2^2+t_3^2)+2(t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1)=(t_1+t_2+t_3)^2\Rightarrow(\dfrac{3x}{c})-2(\dfrac{x}{c}+4)=(\dfrac{3y}{2c})^2\Rightarrow 9y^2=4cx-32c^2$

4. 若實數 x,y,z 滿足 $\begin{cases} x^2+x-1=y \\ y^2+y-1=z \\ z^2+z-1=x \end{cases}$，則 $(x,y,z)=$ ？

解：

令 $a=x+1$、$b=y+1$、$c=z+1$

$\Rightarrow\ x=a-1$、$y=b-1$、$z=c-1$

因為 $x^2+x-1=y$

$\Rightarrow\ (a-1)^2+(a-1)-1=b-1 \quad \Rightarrow \quad a^2=a+b$

同理 $b^2=b+c$、$c^2=c+a$

因此 $(a-b)a^2=(a-b)(a+b)=a^2-b^2=(a+b)-(b+c)=a-c=-(c-a)$ (1)

同理 $(b-c)b^2=(b-c)(b+c)=b^2-c^2=(b+c)-(c+a)=b-a=-(a-b)$ (2)

$(c-a)c^2=(c-a)(c+a)=c^2-a^2=(c+a)-(a+b)=c-b=-(b-c)$ (3)

$\Rightarrow\ (1)\times(2)\times(3)\quad (a-b)(b-c)(c-a)a^2b^2c^2=-(a-b)(b-c)(c-a)$

若 $(a-b)(b-c)(c-a)\neq 0$，則 $a^2b^2c^2=-1$ 不合

所以 $a-b$、$b-c$、$c-a$ 三數中至少有一個為 0

不失一般性，令 $a-b=0$ 代入(1) 中 得 $c-a=0$

所以 $a=b=c$

$\Rightarrow\ x=y=z$

代入 $x^2+x-1=y$

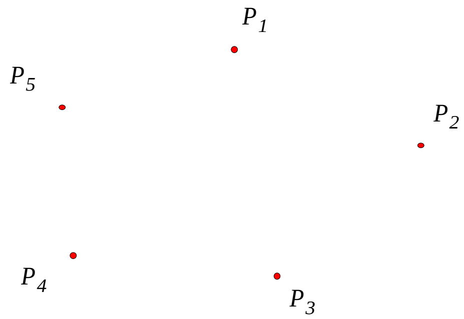
所以 $x^2+x-1=x$

$\Rightarrow\ x=1$ 或 $x=-1$

所以 $(x,y,z)=(1,1,1)$ 或 $(-1,-1,-1)$

5. 如圖，若已知平面上五點 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5，且存在唯一的橢圓通過此五點，

試以尺規作圖作出此橢圓的中心。



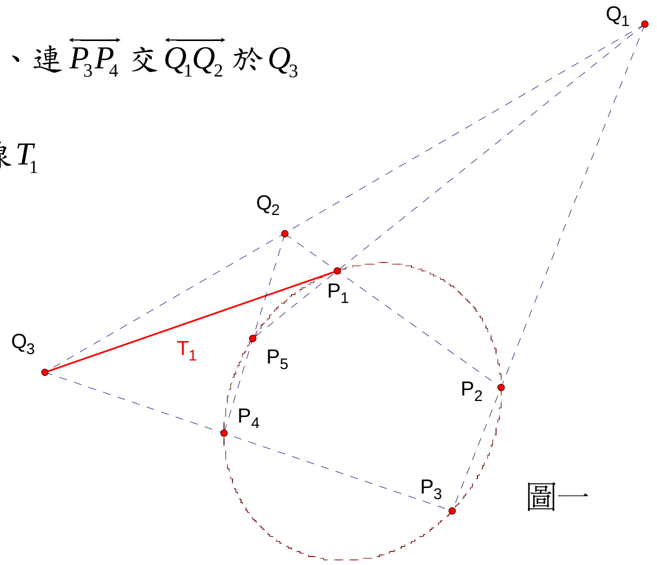
解：

(1)切線的作法(圖一)

例：過 P_1 欲作切線 T_1

連 $\overleftrightarrow{P_1P_5}$ 交 $\overleftrightarrow{P_2P_3}$ 於 Q_1、連 $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ 交 $\overleftrightarrow{P_5P_4}$ 於 Q_2、連 $\overleftrightarrow{P_3P_4}$ 交 $\overleftrightarrow{Q_1Q_2}$ 於 Q_3

由 Pascal’s Theorem 知 $\overleftrightarrow{P_1Q_3}$ 為過 P_1 的切線 T_1



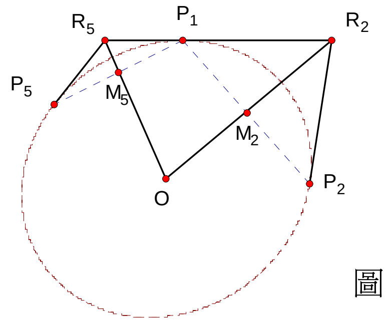
圖一

(2)中心的作法(圖二)

過 P_1 作切線 T_1，過 P_2 作切線 T_2，過 P_5 作切線 T_5，

作 T_1 與 T_2 交點 R_2，作 T_1 與 T_5 交點 R_5，作 $\overline{P_1P_2}$ 中點 M_2，作 $\overline{P_1P_5}$ 中點 M_5

連 $\overleftrightarrow{R_2M_2}$ (直徑)交 $\overleftrightarrow{R_5M_5}$ (直徑)於點 O，點 O 即為所求之對稱中心。



圖二