國 立 台 中 一 中 合 作 盃 數 學 金 頭 腦

第五十一次有獎徵答

收稿時間：99 年 3 月 31 日 ~ 99 年 4 月 2 日 14：00

說明：(1)解答請寫在答案稿紙上，並務必註明「**交件時間**」、「**班級**」、「**姓名**」。
(2)稿件寫完請投入敬業樓一樓**數學科辦公室外銀色的有獎徵答收稿信箱**內。
(3)答案稿紙可至數學科辦公室索取，**一張答案稿紙只能寫一個題目**的解答，如欲投稿兩題以上，請分別寫在不同的答案稿紙，否則不予評閱。
(4)答案稿紙上須註明投稿時間，投稿前**須請數學科任一位老師在投稿時間上簽證**否則視為當日最晚時間繳交。

1. 若干個男女混合班級參加班際盃羽球比賽，同班的選手之間不比賽，不同班的每兩名選手之間都安排一場比賽，有男子雙打、女子雙打及以一男一女的混合雙打等三種賽程。已知所有男、女選手的人數至多相差 2 人，男子雙打、女子雙打的場數和與男女混雙的場數至多相差 1 場，試問：有奇數名選手的班級至多有幾班？

解：

設有 n 個班級，並令第 i 個班級各派出男女選手 $x_i, y_i (i=1,2,3,\cdots,n)$ 人

$$\Rightarrow \left|\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} y_i\right| \le 2$$

又男子雙打、女子雙打的場數與男女混雙的場數分別為 $\sum_{i<j} x_i x_j, \sum_{i<j} y_i y_j, \sum_{i<j}(x_i y_j + x_j y_i)$

$$\Rightarrow \left|\sum_{i<j} x_i x_j + \sum_{i<j} y_i y_j - \sum_{i<j}(x_i y_j + x_j y_i)\right| \le 1$$

得 $\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 = (\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i))^2 - 2\sum_{i<j}(x_i - y_i)(x_j - y_j) \le 6$

這說明在 $(x_i - y_i)^2$ 至多有 6 項不為 0，即至多有 6 項等於 1，其餘各項均為 0

所以派出奇數名選手的班級至多有 6 班

2. 若$\left|\ldots\left|\left|\left|x-2^{0}\right|-2^{1}\right|-2^{2}\right|-2^{3}\right|\ldots-2^{2n}\Big|^{2}=k$有相異十根，求$k$的範圍。

解：

觀察$y=f(x)=\left|\ldots\left|\left|\left|x-2^{0}\right|-2^{1}\right|-2^{2}\right|-2^{3}\right|\ldots-2^{2n}\Big|^{2}$的圖形

$x=2^{0}$為圖形對稱軸

在$x=2^{0}$右方的圖形以$x=2^{0}+2^{1}$為對稱軸

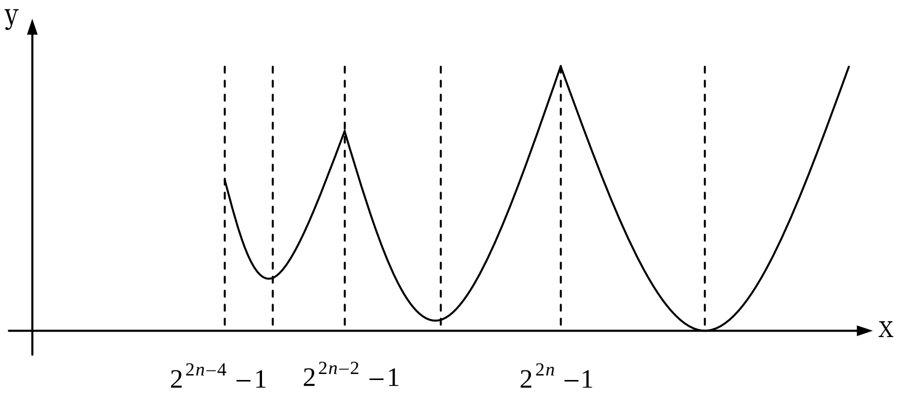
在$x=2^{0}+2^{1}$右方的圖形以$x=2^{0}+2^{1}+2^{2}$為對稱軸

.

.

在$x=2^{0}+2^{1}+\ldots+2^{2n-1}$右方的圖形以$x=2^{0}+2^{1}+2^{2}+\ldots+2^{2n}$為對稱軸

綜上所述，$y=f(x)$的圖形，略示如下：



其中A點的y坐標為$f(2^{0}+2^{1}+2^{2}+\ldots+2^{2n-5})=\left|\left|\left|\left|-2^{2n-4}\right|-2^{2n-3}\right|-2^{2n-2}\right|-2^{2n-1}\right|-2^{2n}\Big|^{2}$

$$=(2^{2n}+2^{2n-4}+2^{2n-2}-2^{2n-1}-2^{2n-3})^{2}=121\times2^{4n-8}$$

B點的y坐標為$f(2^{0}+2^{1}+2^{2}+\ldots+2^{2n-3})=\left|\left|-2^{2n-2}\right|-2^{2n-1}\right|-2^{2n}\Big|^{2}$

$$=(2^{2n}+2^{2n-2}-2^{2n-1})^{2}=9\times2^{4n-4}$$

依題意 $y=f(x)$與$y=k$交 10 個點

所以 $121\times2^{4n-8}<k<9\times2^{4n-4}$

3. 假設正實數a,b,c滿足$a^b > b^a$且$b^c > c^b$，則$a^c > c^a$是否成立？試證明之。

解：

成立。

$(a^c)^b = (a^b)^c > (b^a)^c = (b^c)^a > (c^b)^a = (c^a)^b$，故$a^c > c^a$

4. 已知橢圓$\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$的左右焦點分別為$F_1$、$F_2$，過$F_1$的直線$L_1$交橢圓於$B$、$D$兩點，過$F_2$的直線$L_2$交橢圓於$A$、$C$兩點，$L_1$、$L_2$相交於$P$點且$L_1\perp L_2$。

試求四邊形$ABCD$面積的最小值。

解：

令$L_1\left(\overleftrightarrow{BD}\right)$斜率為$m$

Case1　m不存在或$m=0$

$\overline{AC}$、$\overline{BD}$一為長軸、一為短軸得$ABCD=\dfrac{1}{2}\times 2a\times\dfrac{2b^2}{a}=b^2=4$

Case2　m存在且$m\neq 0$

$c=\sqrt{3-2}=1$、$O(0,0)\Rightarrow F_1(-1,0)\Rightarrow L_1:y=m_1(x+1)$代入$\Gamma:\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$得

$\left(3m^2+2\right)x^2+6m^2x+3m^2-6=0$

其兩根α、β滿足$\begin{cases}\alpha+\beta=-\dfrac{6m^2}{3m^2+2}\\ \alpha\beta=\dfrac{3m^2-6}{3m^2+2}\end{cases}$，則

$$\begin{aligned}\overline{BD}&=\sqrt{m^2+1}\left|\alpha-\beta\right|\\&=\sqrt{m^2+1}\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\frac{4\sqrt{3}\left(m^2+1\right)}{3m^2+2}\end{aligned}$$

又$\overline{AC}$、$\overline{BD}$交於P且$\overline{AC}$斜率為$-\dfrac{1}{m}$

得$\overline{AC}=\dfrac{4\sqrt{3}\left(\dfrac{1}{m^2}+1\right)}{3\left(\dfrac{1}{m^2}\right)+2}=\dfrac{4\sqrt{3}\left(m^2+1\right)}{2m^2+3}$

四邊形$ABCD$面積為

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\times\overline{BD}\times\overline{AC}&=\frac{24\left(m^2+1\right)^2}{\left(3m^2+2\right)\left(2m^2+3\right)}\\&\geq\frac{24\left(m^2+1\right)^2}{\left[\dfrac{\left(3m^2+2\right)+\left(2m^2+3\right)}{2}\right]^2}=\frac{96}{25}\end{aligned}$$

綜合 Case1 與 Case2 得面積最小值為$\dfrac{96}{25}$

5.求所有的質數 p ，滿足 $5^p + 4p^4$ 為完全平方數。

解答：

設 $5^p + 4p^4 = q^2$ ，則 $5^p = (q-2p^2)(q+2p^2)$ ，

故 $q-2p^2 = 5^s$ ， $q+2p^2 = 5^t$ $(0 \le s < t, s+t = p)$

消去 q 知 $4p^2 = 5^s(5^{t-s}-1)$

若 $s > 0$ ，則 $5 \mid 4p^2$ ，因此 $p = 5$

此時，所給表達式確實為完全平方。

若 $s = 0$ ，則 $t = p$ ，且有 $5^p = 4p^2 + 1$ ，

只要證明：對於任意的 k $(k \ge 2)$ ， $5^k > 4k^2 + 1$ 利用數學歸納法

當 $k = 2$ 時，結論顯然成立

假設對 $k \ge 2$ ，命題成立，則 $\dfrac{4(k+1)^2+1}{4k^2+1} = \dfrac{4k^2+1}{4k^2+1} + \dfrac{8k}{4k^2+1} + \dfrac{4}{4k^2+1} < 1+1+1 < 5$

故 $5^{k+1} = 5 \times 5^k > 5(4k^2+1) > 4(k+1)^2 + 1$

因此，命題對 $k \ge 2$ 均成立