

國立台中一中合作盃數學金頭腦

第五十一次有獎徵答

收稿時間：99年3月31日 ~ 99年4月2日 14:00

- 說明：(1)解答請寫在答案稿紙上，並務必註明「交件時間」、「班級」、「姓名」。
- (2)稿件寫完請投入敬業樓一樓數學科辦公室外銀色的有獎徵答收稿信箱內。
- (3)答案稿紙可至數學科辦公室索取，一張答案稿紙只能寫一個题目的解答，如欲投稿兩題以上，請分別寫在不同的答案稿紙，否則不予評閱。
- (4)答案稿紙上須註明投稿時間，投稿前須請數學科任一位老師在投稿時間上簽證，否則視為當日最晚時間繳交。

1. 若干個男女混合班級參加班際盃羽球比賽，同班的選手之間不比賽，不同班的每兩名選手之間都安排一場比賽，有男子雙打、女子雙打及以一男一女的混合雙打等三種賽程。已知所有男、女選手的人數至多相差2人，男子雙打、女子雙打的場數和與男女混雙的場數至多相差1場，試問：有奇數名選手的班級至多有幾班？
2. 設 $n \in N$ ， $k \in R$ ，若 $\left| \dots \left| \left| x - 2^0 \right| - 2^1 \right| - 2^2 \right| - 2^3 \left| \dots - 2^{2n} \right|^2 = k$ 有相異十個實根，求實數 k 的範圍。
3. 假設正實數 a, b, c 滿足 $a^b > b^a$ 且 $b^c > c^b$ ，則 $a^c > c^a$ 是否成立？試證明之。
4. 已知橢圓 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ 的左右焦點分別為 F_1 、 F_2 ，過 F_1 的直線 L_1 交橢圓於 B 、 D 兩點，過 F_2 的直線 L_2 交橢圓於 A 、 C 兩點， L_1 、 L_2 相交於 P 點且 $L_1 \perp L_2$ 。試求四邊形 $ABCD$ 面積的最小值。
5. 求所有的質數 p ，滿足 $5^p + 4p^4$ 為完全平方數。