

台灣省立台中一中 合作盃數學金頭腦

第五次有獎徵答

收稿時間:87年11月9日~87年11月13日下午3時

1. 令 r 及 s 為已知正整數，四個正整數 a 、 b 、 c 、 d 滿足

$$\text{l.c.m.}[a,b,c]=\text{l.c.m.}[a,b,d]=\text{l.c.m.}[a,c,d]=\text{l.c.m.}[b,c,d]=3^r \cdot 7^s$$

求一公式，表出這種數組 $\{a, b, c, d\}$ 共有多少個？

2. 利用數學歸納法

試證：任意 n 個連續正整數的乘積可被 $n!$ 整除 (n 為定數)

[即 $a(a+1)(a+2)(a+3)\cdots(a+n-1)$ 可被 $n!$ 整除 (a 為任意正整數)]

3. 設四面體的四個面的面積分別為 S_1, S_2, S_3, S_4 ，它們的最大值為 S ，

令 $k = \frac{1}{S}(S_1 + S_2 + S_3 + S_4)$ ，則 k 值一定滿足下列關係之一

(A) $2 < k \leq 4$ (B) $3 < k < 4$ (C) $2.5 < k \leq 4.5$ (D) $3.5 < k < 5.5$

請選出你的答案，並證明之。

4. 已知 $\overline{AB} = k$ ，若動點 P 滿足 $\overline{AP} = k$ 且 P 在直線 AB 上的正射影為點 H ，

求 $\triangle BPH$ 面積的最大值。

5. 如右圖， P 為正方形 $ABCD$ 內一點，已知 $\overline{PA} = 1$

$\overline{PB} = 3, \overline{PD} = \sqrt{7}$ ，求正方形 $ABCD$ 的面積。

