國 立 台 中 一 中 合 作 盃 數 學 金 頭 腦

第五十次有獎徵答

收稿時間：98 年 12 月 16 日 ～ 98 年 12 月 18 日 14：00

說明：(1)解答請寫在答案稿紙上，並務必註明「**交件時間**」、「**班級**」、「**姓名**」。 (2)稿件寫完請投入敬業樓一樓**數學科辦公室**外**銀色的有獎徵答收稿信箱**內。 (3)答案稿紙可至數學科辦公室索取，**一張答案稿紙只能寫一個題目**的解答，如欲投稿兩題以上，請分別寫在不同的答案稿紙，否則不予評閱。 (4)答案稿紙上須註明投稿時間，投稿前**須請數學科任一位老師在投稿時間上簽證**否則視為當日最晚時間繳交。

1. 設 $a,b,c,a+b-c,b+c-a,c+a-b,a+b+c$ 是 7 個兩兩不同的質數，且 a,b,c 中有兩數的和是 800。若 d 是這 7 個質數中最大數與最小數的差，試求 d 的最大可能值？

解：

設 $a+b=800$，則 $800-c\,(=a+b-c)$、$800+c\,(=a+b+c)$ 均為質數

其中 $c\neq 3,\ c\not\equiv 1\pmod 3$，若 $c=3$, 則 $a+b+c=803$ 被 11 整除

則 $c\equiv 2\pmod 3 \Rightarrow 3\mid 800-c \Rightarrow 800-c\le 3$

即 $800-c=3$ (7 數中最小的數) $\Rightarrow c=797$

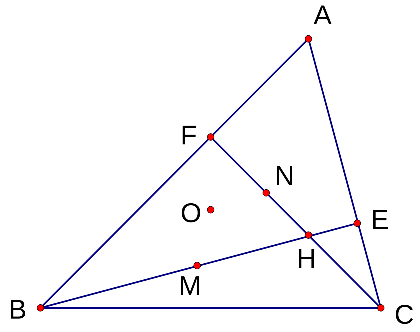
$\Rightarrow a+b+c=800+797=1579$ (7 數中最大的數)

當 $a=13$，$b=787$，$c=797$ 時，$a+b-c=3$，$b+c-a=1571$，

$c+a-b=23$，$a+b+c=1597$ 均為質數

$\Rightarrow d=1597-3=1594$

2. 如圖所示，在 ΔABC 中，$\angle A = 60°$，$\overline{AB} > \overline{AC}$，點 O 為外心，兩條高 $\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 交於點 H，點 M, N 分別在 $\overline{BH}, \overline{HF}$ 上且滿足 $\overline{BM} = \overline{CN}$，求 $\dfrac{\overline{MH}+\overline{NH}}{\overline{OH}} = ?$



解：$\because O$ 為 ΔABC 外心，$\therefore \angle BOC = 2\angle A = 120°$

又 H 為垂心，$\therefore \angle EHF = 180° - \angle A = 120°$

$\therefore \angle BHC = \angle BOC = 120°$ $\therefore B, O, H, C$ 四點共圓

$\therefore \angle OHB = \angle OCB = \angle OBC = 30°$，$\angle OBH = \angle OCH$

設 $\angle OBH = \theta$，則 $\angle HOC = \angle HBC = 30° - \theta$

$\therefore \angle BOH = 180° - \angle OBH - \angle OHB = 150° - \theta$

在 ΔOBH 中，$\dfrac{\overline{BH}}{\overline{OH}} = \dfrac{\sin\angle BOH}{\sin\angle OBH} = \dfrac{\sin(150°-\theta)}{\sin\theta}$

在 ΔOCH 中，$\dfrac{\overline{CH}}{\overline{OH}} = \dfrac{\sin\angle COH}{\sin\angle OCH} = \dfrac{\sin(30°-\theta)}{\sin\theta}$

$\therefore \dfrac{\overline{MH}+\overline{NH}}{\overline{OH}} = \dfrac{\overline{BH}}{\overline{OH}} - \dfrac{\overline{CH}}{\overline{OH}} = \dfrac{\sin(150°-\theta)-\sin(30°-\theta)}{\sin\theta}$

$$= \frac{2\cos(90°-\theta)\sin 60°}{\sin\theta} = \frac{2\sin\theta \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin\theta} = \sqrt{3}$$

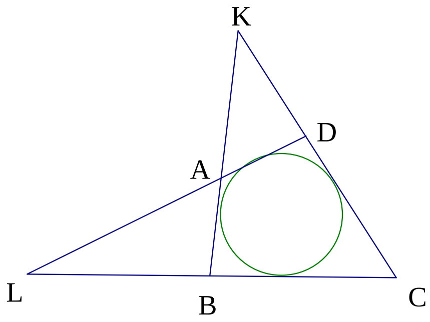
3. 凸四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}$ 、$\overline{DC}$ 延長後相交於 K ，$\overline{AD}$ 、$\overline{BC}$ 的延長後相交於 L。

若 $\overline{BK}+\overline{BL}=\overline{DK}+\overline{DL}$ ，證明 $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{BC}+\overline{AD}$ 。

解：

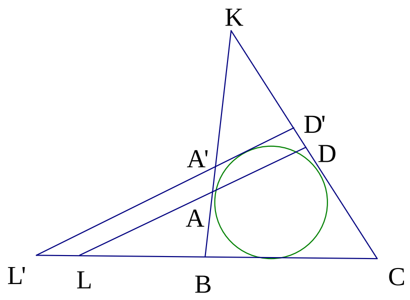
我們將用以下的事實來證明。如圖所示，若 $ABCD$ 為圓外接四邊形，

則 $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{BC}+\overline{AD}$ ，$\overline{BK}+\overline{BL}=\overline{DK}+\overline{DL}$ 。



利用反證法。

假設四邊形 $ABCD$ 不為圓外接四邊形，可作直線 $A'D'$ 平行 $\overline{AD}$，交直線 BC 於 F' 使 $A'BCD'$ 為圓外接四邊形，不妨假設 $\overline{LD}<\overline{L'D'}$ 。因此



$\overline{BK}+\overline{BL'}=\overline{D'K}+\overline{D'L'}\ldots(1)$，

已知 $\overline{BK}+\overline{BL}=\overline{DK}+\overline{DL}\ldots(2)$，

(1)－(2)得 $\overline{LL'}=\overline{DL}+\overline{D'L'}-\overline{DD'}$ ，但 $\overline{DL}>\overline{DD'}+\overline{LL'}$ ，矛盾。

若 $\overline{LD}>\overline{L'D'}$ ，同理可證。因此四邊形 $ABCD$ 為圓外接四邊形，$\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{BC}+\overline{AD}$ 。

4. 地面上有 10 隻小鳥在啄食，並且任意 5 隻中至少有 4 隻在同一個圓周上，問有鳥最多的圓周上最少有幾隻鳥？

解：

9 隻鳥在同一圓上，1 隻鳥不在這個圓上，這種情況滿足題中要求。

設有鳥最多的圓上最少有 m 隻鳥，$m \le 9$。

我們證明 $m = 9$，顯然 $m \ge 4$。

如果 $5 \le m \le 8$，那麼設圓 C 上有 m 隻鳥，則圓 C 外至少有 2 隻鳥 b_1、b_2，對圓 C 上的任 3 隻鳥，其中必有 2 隻與 b_1、b_2 共圓，設 C 上的 b_3、b_4 與 b_1、b_2 共圓，b_5、b_6 與 b_1、b_2 共圓，對圓 C 上的第 5 隻鳥 b_7 及 b_3、b_5，它們中沒有兩隻能與 b_1、b_2 共圓，矛盾。

接下來證明 $m \ne 4$。

設 $m < 10$，則必有 4 隻鳥不在同一圓上，過其中每 3 隻作一個圓，共得 4 個圓，其餘 6 隻鳥中的每一隻與上述 4 隻鳥組成 5 元組，因此這隻鳥必在某一個圓上，6 隻鳥中必有 2 隻在同一個圓上，從而這個圓上至少有 5 隻鳥。

5. 若 x, y, z 都大於 1，求證：$\frac{x^4}{(y-1)^2}+\frac{y^4}{(z-1)^2}+\frac{z^4}{(x-1)^2}\geq 48$。

解：$\frac{x^4}{(y-1)^2}+16(y-1)+16(y-1)+16\geq 4\sqrt[4]{16^3x^4}=32x$

即 $\frac{x^4}{(y-1)^2}\geq 32(x-y)+16$

同理 $\frac{y^4}{(z-1)^2}+16(z-1)+16(z-1)+16\geq 4\sqrt[4]{16^3y^4}=32y$

即 $\frac{y^4}{(z-1)^2}\geq 32(y-z)+16$

$\frac{z^4}{(x-1)^2}+16(x-1)+16(x-1)+16\geq 4\sqrt[4]{16^3z^4}=32z$

即 $\frac{z^4}{(x-1)^2}\geq 32(z-x)+16$

相加可得 $\frac{x^4}{(y-1)^2}+\frac{y^4}{(z-1)^2}+\frac{z^4}{(x-1)^2}\geq 48$

等號成立為 $x=y=z=2$