國 立 台 中 一 中 合 作 盃 數 學 金 頭 腦

第四十九次有獎徵答

收稿時間：98 年 10 月 14 日 ～ 98 年 10 月 16 日 14：00

說明：(1)解答請寫在答案稿紙上，並務必註明「**交件時間**」、「**班級**」、「**姓名**」。
(2)稿件寫完請投入敬業樓一樓**數學科辦公室**外**銀色的有獎徵答收稿信箱**內。
(3)答案稿紙可至數學科辦公室索取，**一張答案稿紙只能寫一個題目**的解答，
如欲投稿兩題以上，請分別寫在不同的答案稿紙，否則不予評閱。
(4)答案稿紙上須註明投稿時間，投稿前**須請數學科任一位老師在投稿時間上簽證**
否則視為當日最晚時間繳交。

1. m 個互不相同的正偶數與 n 個互不相同的正奇數的總和為 2009。對於所有這樣的 m 、n ，求 $3m+4n$ 的最大值。

解：

設此 m 個偶數為 $x_1, x_2, ..., x_m$ 且 $x_1 < x_2 < ... < x_m$

設此 n 個偶數為 $y_1, y_2, ..., y_n$ 且 $y_1 < y_2 < ... < y_n$

$\Rightarrow x_1 + x_2 + ... + x_m + y_1 + y_2 + ... + y_n = 2009$

$\because x_1 + x_2 + ... + x_m$ 為偶數 $\Rightarrow y_1 + y_2 + ... + y_n$ 為奇數 $\Rightarrow n$ 為奇數

又 $x_i \ge 2i\ (i = 1, 2, ..., m)$ ， $y_i \ge 2i - 1\ (i = 1, 2, ..., n)$

$$\begin{aligned}\Rightarrow 2009 &= (x_1 + x_2 + ... + x_m) + (y_1 + y_2 + ... + y_n)\\ &\ge (2 + 4 + ... + 2m) + (1 + 3 + ... + 2n - 1)\\ &= m(m+1) + n^2 = (m + \frac{1}{2})^2 + n^2 - \frac{1}{4}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad (m + \frac{1}{2})^2 + n^2 \le 2009 + \frac{1}{4} \quad (*)$$

令 $\begin{cases} m = \dfrac{-1}{2} + 3t \\ n = 4t \end{cases}$ 代入(∗) 得 $t \le 8.965$

$\Rightarrow \quad (m, n) = (26.395, 35.86)$

取 $m = 27$ 、 $n = 35$ 代入 $3m + 4n$ 得最大值 221

2. 設 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ 是 n 個相異自然數，試證：$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}+\cdots+\frac{1}{x_n^2}<2$, $\forall\, n>1$。

解：

$\because n$ 個相異自然數，不失一般性可設

$1\le x_1<x_2<x_3<\cdots<x_n \quad \forall x_i\in N, i=1,2,3,\cdots,n$

$\therefore x_1\ge 1, x_2\ge 2, x_3\ge 3, \cdots, x_n\ge n$,

$\therefore \frac{1}{x_1^2}\le 1, \frac{1}{x_2^2}\le\frac{1}{2^2}, \frac{1}{x_3^2}\le\frac{1}{3^2}, \cdots, \frac{1}{x_n^2}\le\frac{1}{n^2}$

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}+\cdots+\frac{1}{x_n^2}$$
$$\le\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$$
$$\le\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}$$
$$=1+(\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})$$
$$=2-\frac{1}{n}<2$$

3. 請解出方程式$(x+3)^7-(x-3)^7=0$之所有根。

解：

$\because x=3$代入不合，$\therefore (\frac{x+3}{x-3})^7=1 \Rightarrow (1+\frac{6}{x-3})^7=1$

$\Rightarrow 1+\frac{6}{x-3}=\cos\frac{2k\pi}{7}+i\sin\frac{2k\pi}{7}\ (k\in N, 1\le k\le 7)$

$\Rightarrow \frac{6}{x-3}=(\cos\frac{2k\pi}{7}-1)+i\sin\frac{2k\pi}{7}$

（$\because k=7$代入$(\cos\frac{2\times 7\times \pi}{7}-1)+i\sin\frac{2\times 7\times \pi}{7}=0$，即$\frac{6}{x-3}=0$不合，$\therefore k\ne 7$）

$$\Rightarrow \frac{x-3}{6}=\frac{1}{(\cos\frac{2k\pi}{7}-1)+i\sin\frac{2k\pi}{7}}=\frac{1}{-2\sin^2\frac{k\pi}{7}+i(2\sin\frac{k\pi}{7}\cos\frac{k\pi}{7})}$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{k\pi}{7}}\times\frac{-\sin\frac{k\pi}{7}-i\cos\frac{k\pi}{7}}{1}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\cot\frac{k\pi}{7}$$

$\Rightarrow x-3=-3-3i\cot\frac{k\pi}{7}$

$\Rightarrow x=-3i\cot\frac{k\pi}{7}(k\in N, 1\le k\le 6)$

註：122 廖俊杰提供解法

4. 設a,b是方程式$x^4+x^3-1=0$的兩個根，證明ab是$x^6+x^4+x^3-x^2-1=0$的一個根。

解：

假設 c,d 是另外兩個根，由根與係數知

$$\begin{cases} a+b+c+d=-1 \\ ab+ac+ad+bc+bd=0 \\ abc+abd+acd+bcd=0 \\ abcd=-1 \end{cases}$$

假設$s=a+b, s'=c+d, p=ab, p'=cd$

$$\begin{cases} s+s'=-1 & \cdots(1) \\ p+p'+ss'=0 & \cdots(2) \\ ps'+p's=0 & \cdots(3) \\ pp'=-1 & \cdots(4) \end{cases} \Rightarrow p'=-\frac{1}{p}, s'=-1-s \text{ 代入(2)(3)}$$

$$\begin{array}{l} p-\frac{1}{p}-s^2-s=0 \\ p(-1-s)-\frac{s}{p}=0 \end{array} \Rightarrow s=-\frac{p^2}{p^2+1} \text{ 代入得 } p-\frac{1}{p}-\frac{p^4}{(p^2+1)^2}+\frac{p^2}{p^2+1}=0 \Rightarrow p^6+p^4+p^3-p^2-1=0 \quad \text{Q.E.D}$$

5. 試找出所有大於 3 的正整數 n，使 n 滿足：「設 a_1、a_2、…、a_n 成等差數列，若 $a_1+2a_2+\cdots na_n$ 為有理數，則 a_1、a_2、…、a_n 中至少有一個數為有理數。」

解：

設 a_1、a_2、…、a_n 的公差為 d，則

$$a_1+2a_2+\cdots na_n=\sum_{k=1}^{n}k\left[a_1+(k-1)d\right]=a_1\sum_{k=1}^{n}k+d\sum_{k=1}^{n}k(k-1)$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}a_1+\frac{d}{3}\sum_{k=2}^{n}\left[(k+1)k(k-1)-k(k-1)(k-2)\right]$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}a_1+\frac{(n+1)n(n-1)}{3}d$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\left[a_1+\frac{2(n-1)}{3}d\right]$$

(1) 若 $n-1$ 為 3 的倍數，則 $a_1+2a_2+\cdots na_n=\dfrac{n(n+1)}{2}a_{\frac{2n+1}{3}}$，於是當 $a_1+2a_2+\cdots na_n$ 為有理數時，

$a_{\frac{2n+1}{3}}$ 為有理數。

(2) 若 $n-1$ 不為 3 的倍數，令 $a_1=\sqrt{2}$，$d=-\dfrac{3}{2(n-1)}\sqrt{2}$，

則數列 a_1、a_2、…、a_n 中的每一項皆為無理數，但 $a_1+2a_2+\cdots na_n$ 為有理數

由(1)(2)因此，滿足條件的正整數 n，型如 $3k+1$，其中 $k=0$ 或正整數。