

國立台中一中合作盃數學金頭腦

第四十九次有獎徵答

收稿時間：98年10月14日 ~ 98年10月16日 14:00

- 說明：(1)解答請寫在答案稿紙上，並務必註明「交件時間」、「班級」、「姓名」。
- (2)稿件寫完請投入敬業樓一樓數學科辦公室外銀色的有獎徵答收稿信箱內。
- (3)答案稿紙可至數學科辦公室索取，一張答案稿紙只能寫一個题目的解答，如欲投稿兩題以上，請分別寫在不同的答案稿紙，否則不予評閱。
- (4)答案稿紙上須註明投稿時間，投稿前須請數學科任一位老師在投稿時間上簽證，否則視為當日最晚時間繳交。

1. m 個互不相同的正偶數與 n 個互不相同的正奇數的總和為 2009。對於所有這樣的 m 、 n ，求 $3m+4n$ 的最大值。
2. 設 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ 是 n 個相異自然數，試證：
$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} + \dots + \frac{1}{x_n^2} < 2, \forall n > 1。$$
3. 請解出方程式 $(x+3)^7 - (x-3)^7 = 0$ 之所有根。
4. 設 a, b 是方程式 $x^4 + x^3 - 1 = 0$ 的兩個根，證明 ab 是 $x^6 + x^4 + x^3 - x^2 - 1 = 0$ 的一個根。
5. 試找出所有大於 3 的正整數 n ，使 n 滿足：「設 a_1, a_2, \dots, a_n 成等差數列，若 $a_1 + 2a_2 + \dots + na_n$ 為有理數，則 a_1, a_2, \dots, a_n 中至少有一個數為有理數。」