國 立 台 中 一 中 合 作 盃 數 學 金 頭 腦

第四十八次有獎徵答

收稿時間：98 年 5 月 20 日 ～ 98 年 5 月 22 日 14：00

說明：(1)解答請寫在答案稿紙上，並務必註明「**交件時間**」、「**班級**」、「**姓名**」。
(2)稿件寫完請投入敬業樓一樓**數學科辦公室**外**銀色的有獎徵答收稿信箱**內。
(3)答案稿紙可至數學科辦公室索取，**一張答案稿紙只能寫一個題目**的解答，如欲投稿兩題以上，請分別寫在不同的答案稿紙，否則不予評閱。
(4)答案稿紙上須註明投稿時間，投稿前**須請數學科任一位老師在投稿時間上簽證**否則視為當日最晚時間繳交。

1. 已知實係數方程式 $5x^3-5x^2-x+1=5px^2-71px+66p$ 的三根均為自然數，求實數 p 。

解： $5x^3-5x^2-x+1=5px^2-71px+66p$

$\Rightarrow 5x^3-(5+5p)x^2-(1-71p)x-(66p-1)=0$

$\Rightarrow (x-1)[5x^2-5px+(66p-1)]=0$

設 β,γ 為正整數，是 $5x^2-5px+(66p-1)=0$ 之兩根

$\therefore (x-\beta)(5x-5\gamma)=0$

$\Rightarrow 5x^2-(5\beta+5\gamma)x+5\beta\gamma=0$

$$\therefore \begin{cases} \beta+\gamma=p ......(1) \\ 5\beta\gamma=66p-1 ...(2) \end{cases}$$

(1)式代入(2)式

$\Rightarrow 5\beta\gamma=66(\beta+\gamma)-1$

$\Rightarrow 66\beta+66\gamma-5\beta\gamma=1$

$\Rightarrow (66-5\gamma)(66-5\beta)=66^2-5=4351=19\times 229$

$\therefore \begin{cases} 66-5\gamma=19 \\ 66-5\beta=229 \end{cases}$（不合，因為 β,γ 非整數解）

或 $\therefore \begin{cases} 66-5\gamma=-19 \\ 66-5\beta=-229 \end{cases} \Rightarrow \beta=17,\gamma=59$ 代入(1)式得 $p=76$

註：219 張德威提供解法

2. 設a,b,c為正實數，求$\dfrac{a}{b+3c}+\dfrac{b}{8c+4a}+\dfrac{c}{3a+2b}$之最小值為何？

解：

$$b+3c=x$$

$$8c+4a=y$$

$$3a+2b=z$$

$$a=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{8}y+\frac{1}{6}z$$

$$b=\frac{1}{2}x-\frac{3}{16}y+\frac{1}{4}z$$

$$c=\frac{1}{6}x+\frac{1}{16}y-\frac{1}{12}z$$

$$\text{所求}=\frac{1}{8}\left(\frac{y}{x}+\frac{4x}{y}\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{z}{x}+\frac{9x}{z}\right)+\frac{1}{16}\left(\frac{4z}{y}+\frac{9y}{z}\right)-\frac{61}{48}$$

$$\geq\frac{1}{8}\cdot 2\sqrt{4}+\frac{1}{6}\cdot 2\sqrt{9}+\frac{1}{16}\cdot 2\sqrt{36}-\frac{61}{48}=\frac{47}{48}$$

3. 設 n 是大於 1 的正整數，且對每一個 n 的正因數 d，$d+1$都是$n+1$的因數，試證明 n 是質數。
解：

令 p 是 n 的最小質因數，且 $d=\frac{n}{p}$

則 $\frac{np+p}{n+p}=\frac{p(n+1)}{p(d+1)}=\frac{n+1}{d+1}$ 是一個整數，即 $(n+p)\,|\,(np+p)$

又 $(n+p)\,|\,(n+p)$，故 $(n+p)\,|\,(p(n+p)-(np+p))$，得 $(n+p)\,|\,(p^2-p)$

$\because p^2-p>0$，$\therefore n+p\le p^2-p$，故 $n<p^2$，同除以 p，得 $d<p$

假設 d 有某個質因數 q，則 $q\le d<p$

又 $q\,|\,n$，此與 p 是 n 的最小質因數矛盾，故 q 不存在，即 $d=1$

因此，$n=p$，即 n 是質數

4. 甲、乙、丙三人依甲、乙、丙、甲、乙、丙、……的次序輪流取走棋盤上 20 顆圍棋白子，每次僅能取走 1 顆或 2 顆棋子，直到棋子被取光為止。若最後由甲取光剩餘的棋子，則三人取走棋子的可能情形有多少種？

【討論】

(方法 1)

(1)甲取走最後一顆白子時，設前 19 顆白子中被取走 1 顆、2 顆分別為 x, y 次

$\Rightarrow x+2y=19$ 且 $x+y$ 為 3 的倍數

其情形有

x	17	11	5
y	1	4	7

$$\Rightarrow \frac{18!}{17!1!}+\frac{15!}{11!4!}+\frac{12!}{5!7!}=18+1365+792=2175$$

(2)甲取走最後二顆白子時，設前 18 顆白子中被取走 1 顆、2 顆分別為 x, y 次

$\Rightarrow x+2y=18$ 且 $x+y$ 為 3 的倍數

其情形有

x	18	12	6	0
y	0	3	6	9

$$\Rightarrow \frac{18!}{18!0!}+\frac{15!}{12!3!}+\frac{12!}{6!6!}+\frac{9!}{9!0!}=1+455+924+1=1381$$

由(1)(2)得 2175+1381=3556 種情形

(方法 2)

設甲、乙、丙、甲、乙、丙、……的次序輪流取走 n 顆圍棋白子，每次僅能取走 1 顆或 2 顆棋子，直到棋子被取光為止，且最後由甲取光剩餘的棋子的情形有 a_n 種

，則 $a_1=1, a_2=1, a_3=0, a_4=1, a_5=4, a_6=6, a_7=5$，且 $a_n=a_{n-3}+3a_{n-4}+3a_{n-5}+a_{n-6}$

說明：

(1)當甲取走最後一顆白子時，前一步乙、丙各取走 1 顆，

則前 $n-3$ 顆白子被取完的情形有 a_{n-3} 種

(2)當甲取走最後一顆白子時，前一步乙、丙各取走 1 顆、2 顆，

則前 $n-4$ 顆白子被取完的情形有 a_{n-4} 種

(3)當甲取走最後一顆白子時，前一步乙、丙各取走 2 顆、1 顆，

則前 $n-4$ 顆白子被取完的情形有 a_{n-4} 種

(4)當甲取走最後一顆白子時，前一步乙、丙各取走 2 顆、2 顆，

則前 $n-5$ 顆白子被取完的情形有 a_{n-5} 種

(5)當甲取走最後 2 顆白子時，前一步乙、丙各取走 1 顆、1 顆，

則前 $n-4$ 顆白子被取完的情形有 a_{n-4} 種

(6)當甲取走最後 2 顆白子時，前一步乙、丙各取走 1 顆、2 顆，

則前 $n-5$ 顆白子被取完的情形有 a_{n-5} 種

(7)當甲取走最後一顆白子時，前一步乙、丙各取走 2 顆、1 顆，

則前 $n-5$ 顆白子被取完的情形有 a_{n-5} 種

(8)當甲取走最後一顆白子時，前一步乙、丙各取走 2 顆、2 顆，

則前 $n-6$ 顆白子被取完的情形有 a_{n-6} 種

綜合(1)~(4)可得 $a_n = a_{n-3} + 3a_{n-4} + 3a_{n-5} + a_{n-6}$

進而得 $a_{20} = 3556$

5. 平面上任給 5 點，λ 為這些點間最大距離與最小距離之比，證明 $\min\lambda = 2\sin 54°$。

解：

考慮這五點 A、B、C、D、E 所形成的凸包圖形：

(1) 若圖形為 $\overline{AE}$ ，則對已知點 B，$\dfrac{\overline{AE}}{\min(\overline{AB},\overline{BE})} \ge 2 > 2\sin 54°$

(2) 若圖形為 ΔABC ，對已知點 D，$\angle ADB$ 、$\angle BDC$ 、$\angle CDA$ 必有一個不小於 $120°$，不妨設

$\angle ADB \ge 120°$，由餘弦定理，$\overline{AB}^2 \ge \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{AD}\cdot\overline{BD} \ge 3(\min(\overline{AD},\overline{BD}))^2$

因此，$\dfrac{\overline{AB}}{\min(\overline{AD},\overline{BD})} \ge \sqrt{3} > 2\sin 54°$

(3) 若圖形為凸四邊形 $ABCD$，則已知 E 在此四邊形中，不妨設 E 在 ΔABC 中，情況與(2)相同。

(4) 若圖形為凸五邊形 $ABCDE$，由於內角和為 $540°$，必有一內角不小於 $108°$，

不妨設 $\angle A \ge 108°$，則在 ΔABE 中，

$$\overline{BE}^2 \ge \overline{AB}^2 + \overline{AE}^2 - 2\cos 108°\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AE} \quad = \overline{AB}^2 + \overline{AE}^2 + 2\cos 72°\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AE}$$

$$\ge 2(1+\cos 72°)(\min(\overline{AD},\overline{BD}))^2$$

因此，$\dfrac{\overline{BE}}{\min(\overline{AB},\overline{AE})} \ge 2\sqrt{\dfrac{1+\cos 72°}{2}} = = 2\cos 36° = 2\sin 54°$

綜合以上情況，恒有 $\dfrac{M}{m} \ge 2\sin 54°$，若且唯若五點形成五邊形時等號成立。