國 立 台 中 一 中 合 作 盃 數 學 金 頭 腦

第四十七次有獎徵答

收稿時間：98 年 4 月 1 日 ～ 98 年 4 月 3 日 14：00

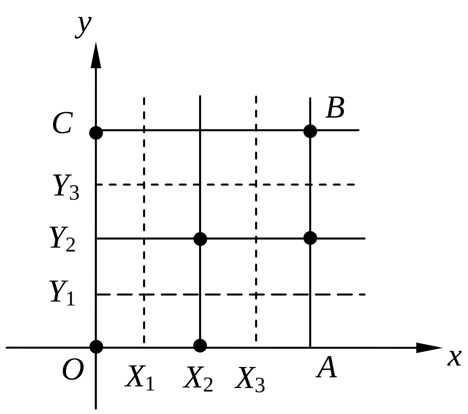
說明：(1)解答請寫在答案稿紙上，並務必註明「**交件時間**」、「**班級**」、「**姓名**」。
(2)稿件寫完請投入敬業樓一樓**數學科辦公室**外**銀色的有獎徵答收稿信箱**內。
(3)答案稿紙可至數學科辦公室索取，**一張答案稿紙只能寫一個題目**的解答，如欲投稿兩題以上，請分別寫在不同的答案稿紙，否則不予評閱。
(4)答案稿紙上須註明投稿時間，投稿前**須請數學科任一位老師在投稿時間上簽證**否則視為當日最晚時間繳交。

1. 坐標平面上任取六個格子點 $P_i(x_i, y_i)$，六個點中任三點不共線，且 $0 \le x_i \le 4, 0 \le y_i \le 4$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$，試證：以這六個點為頂點的所有三角形中至少有一個三角形面積小於或等於 2。

解答：

設結論不成立，所以任一個三角形的面積都大於 2；因為相鄰的任兩條直線上，若有三個或三個以上頂點，其面積必小於或等於 2，故相鄰兩條水平或鉛直直線上最多有 2 個頂點。

若 X_1(或 Y_1)有點，則 $\overline{OC}$ 或 X_2 上最多只能各有 1 個頂點，則 X_3 及 $\overline{AB}$ 上至少有 3 個頂點，則其面積小於或等於 2。矛盾。所以 X_1 上不能有任何頂點 P_i。



同理，X_3、Y_1、Y_3 都不能有任何頂點。

所以此 6 個格子點必分布在三條鉛直線 $\overline{OC}, X_2, \overline{AB}$ 上；

同理 6 個格子點必分布在三條水平線 $\overline{OA}, Y_2, \overline{CB}$ 上；

$\because$ 任三點皆不共線，$\therefore \overline{OC}, X_2, \overline{AB}$ (或 $\overline{OA}, Y_2, \overline{CB}$)上各有兩頂點，如此必有三點共線，矛盾。

$\therefore$ 六個點為頂點的所有三角形中至少有一個三角形面積小於或等於 2。

2. 已知 $f(u)=u^2+au+(b-2)$，其中 $u=x+\dfrac{1}{x}(x\in R，x\neq 0)$。若 a,b 可使方程式 $f(u)=0$ 至少有一個實根，求 a^2+b^2 之最小值，此時 a,b 之值為何？

解答：$u^2+au+(b-2)=0 \;\Rightarrow\; u=\dfrac{1}{2}[-a\pm\sqrt{a^2-4(b-2)}\,]$

又 $|u|\geq 2 \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{2}[\,|a|+\sqrt{a^2-4(b-2)}\,]\geq 2$

$\Rightarrow\; \sqrt{a^2-4(b-2)}\geq 4-|a|$

(i) 當 $\begin{cases} a^2-4(b-2)\geq 0 \\ 4-|a|\geq 0 \end{cases}$ 時，$2|a|\geq b+2$

若 $b+2\geq 0$，則 $4a^2\geq b^2+4b+4 \;\Rightarrow\; a^2+b^2\geq \dfrac{5}{4}b^2+b+1=\dfrac{5}{4}(b+\dfrac{2}{5})^2+\dfrac{4}{5}$

$\therefore$ 當 $b=\dfrac{-2}{5}$，$a=\pm\dfrac{4}{5}$ 時，a^2+b^2 之最小值為 $\dfrac{4}{5}$

若 $b+2<0$，則 $a^2+b^2>4$

(ii) 當 $\begin{cases} a^2-4(b-2)\geq 0 \\ 4-|a|<0 \end{cases}$ 時，$a^2+b^2>16$

由以上討論得 a^2+b^2 之最小值為 $\dfrac{4}{5}$

3. 某校有 7 位老師（$x_1, x_2, ..., x_7$）與 12 個班級（$y_1, y_2, ..., y_{12}$），

每週上課五天所需的授課情形如下面矩陣。

P_{ij} y_j x_i	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}	y_{12}
x_1	3	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
x_2	1	3	6	0	4	2	5	1	3	3	0	4
x_3	5	0	5	5	0	0	5	0	5	0	5	5
x_4	2	4	2	4	2	4	2	4	2	4	2	3
x_5	3	5	2	2	0	3	1	4	4	3	2	5
x_6	5	5	0	0	5	5	0	5	0	5	5	0
x_7	0	3	4	3	4	3	4	3	4	3	3	0

其中 P_{ij} 代表老師 x_i 必需擔任班級 y_j 的上課節數，若每天上課八節，則需要幾間教室？

解答：

$\because$ 總節數 35+32+35+35+34+35+34=240

每天上課 8 節，一星期 5 天，需要 z 間教室

$\therefore$ 共可提供 $8 \times 5 \times z = 40z$（節）

$\therefore$ $240 \leq 40z < 7 \times 8 \times 5$（老師可上的最多節數）

$\therefore$ $6 \leq z < 7$，$z \in Z$

$\therefore$ $z = 6$

4. 數學科舉行桌球單打 PK 循環賽，共有 20 位選手參加，任二人均比一場，無平手。若其中三名選手的勝負為（A 勝 B 且 B 勝 C 且 C 勝 A），則稱此三人形成一個三角結。試問最多有幾個三角結？

解答：

設選手編號 $P_1 \sim P_{20}$

對任一選手而言（ 以 P_1 為例 ）

P_1 共參賽 19 場假設其勝 n_1 場，敗 $(19-n_1)$ 場

P_1 所勝的 n_1 的對手中，任取二人，無法與 P_1 形成三角結 $\Rightarrow$ $C_2^{n_1}$ 個

P_1 所敗的 $(19-n_1)$ 的對手中，任取二人，無法與 P_1 形成三角結 $\Rightarrow$ $C_2^{19-n_1}$ 個

$\therefore$ 與 P_1 有關的的比賽，無形形成三角結的有 $C_2^{n_1}+C_2^{19-n_1}$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{n_1(n_1-1)}{2}+\frac{(19-n_1)(18-n_1)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\{n_1{}^2-n_1+n_1{}^2-37n_1+342\} \\
&= n_1{}^2-19n_1+171 \\
&= (n_1-\frac{19}{2})^2+\frac{323}{4}
\end{aligned}
$$

$\therefore$ n_1 勝 9（ 敗 10 ） 或 勝 10（ 敗 9 ） 場時，有最少的三角結

$C_2^9+C_2^{10}=36+45=81$ 場

$\therefore$ 非三角結至少 $\frac{81\times 20}{2}=810$ 場

（ 除以 2 是因為非三角結(A 勝 B,C)，(B 勝 A 、 B 敗 C)，(C 敗 A 、 C 敗 B))

（ 被計 A 二勝、C 二敗 ，共 2 次 ）

$\therefore$ 三角結至多 $C_3^{20}-810=1140-810=330$ 場

極值出現於 10 人勝 10 場　10 人勝 9 場時

例：P_1 勝 $P_2 \sim P_{11}$　　P_{11} 勝 $P_{12} \sim P_{20}$

P_2 勝 $P_3 \sim P_{12}$　　P_{12} 勝 $P_{13} \sim P_1$

……………………………………

P_{10} 勝 $P_{11} \sim P_{20}$　　P_{20} 勝 $P_1 \sim P_9$

5. 設ΔABC的三邊長為a, b, c ，$n \geq 0, n \in R$ ，試證：$a^n \cos A + b^n \cos B + c^n \cos C \leq \frac{1}{2}(a^n + b^n + c^n)$

解答：根據對稱性，不妨設$a \geq b \geq c$ ，則$a^n \geq b^n \geq c^n$ ，且$\cos A \leq \cos B \leq \cos C$

於是，$(a^n - b^n)(\cos A - \cos B) \leq 0$ ，即

$$a^n \cos A + b^n \cos B \leq a^n \cos B + b^n \cos A$$

同理，$b^n \cos B + c^n \cos C \leq b^n \cos C + c^n \cos B$

$$c^n \cos C + a^n \cos A \leq c^n \cos A + a^n \cos C$$

三式相加，並且兩邊同時加上$a^n \cos A + b^n \cos B + c^n \cos C$

可得$3(a^n \cos A + b^n \cos B + c^n \cos C) \leq (a^n + b^n + c^n)(\cos A + \cos B + \cos C)$

再利用三角不等式$\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$

可以證得$a^n \cos A + b^n \cos B + c^n \cos C \leq \frac{1}{2}(a^n + b^n + c^n)$

等號成立時為$a = b = c$