

國立台中一中合作盃數學金頭腦

第四十七次有獎徵答

收稿時間：98年4月1日 ~ 98年4月3日 14:00

- 說明：(1)解答請寫在答案稿紙上，並務必註明「交件時間」、「班級」、「姓名」。
 (2)稿件寫完請投入敬業樓一樓數學科辦公室外銀色的有獎徵答收稿信箱內。
 (3)答案稿紙可至數學科辦公室索取，一張答案稿紙只能寫一個题目的解答，如欲投稿兩題以上，請分別寫在不同的答案稿紙，否則不予評閱。
 (4)答案稿紙上須註明投稿時間，投稿前須請數學科任一位老師在投稿時間上簽證，否則視為當日最晚時間繳交。

- 坐標平面上任取六個格子點 $P_i(x_i, y_i)$ ，其中 $x_i, y_i \in Z$ ， $0 \leq x_i \leq 4, 0 \leq y_i \leq 4$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$)，且六個點中任三點不共線，試證：以這六個點為頂點的所有三角形中至少有一個三角形面積小於或等於 2。
- 設 $a, b \in R$ ，且 $f(u) = u^2 + au + (b - 2)$ ，其中 $u = x + \frac{1}{x}$ ($x \in R, x \neq 0$)。若 a, b 可使方程式 $f(u) = 0$ 至少有一個實根，求 $a^2 + b^2$ 之最小值，此時 a, b 之值為何？
- 某大學有 7 位老師 (x_1, x_2, \dots, x_7) 與 12 個班級 (y_1, y_2, \dots, y_{12})，每週上課五天所需的授課情形如下表所示：

P_{ij} y_j x_i	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}	y_{12}
x_1	3	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
x_2	1	3	6	0	4	2	5	1	3	3	0	4
x_3	5	0	5	5	0	0	5	0	5	0	5	5
x_4	2	4	2	4	2	4	2	4	2	4	2	3
x_5	3	5	2	2	0	3	1	4	4	3	2	5
x_6	5	5	0	0	5	5	0	5	0	5	5	0
x_7	0	3	4	3	4	3	4	3	4	3	3	0

其中 P_{ij} 代表老師 x_i 必須擔任班級 y_j 的上課節數。若每天上課八節，則需要幾間教室？

4. 數學科舉行桌球單打 *PK* 循環賽，共有 20 位選手參加，任二人均比一場，無平手。若其中三名選手的勝負為 (*A* 勝 *B* 且 *B* 勝 *C* 且 *C* 勝 *A*)，則稱此三人形成一個三角結。試問最多有幾個三角結？

5. 設 $\triangle ABC$ 的三邊長為 a, b, c ，且 $n \geq 0, n \in R$ ，試證： $a^n \cos A + b^n \cos B + c^n \cos C \leq \frac{1}{2}(a^n + b^n + c^n)$ 。