國 立 台 中 一 中 合 作 盃 數 學 金 頭 腦

第四十六次有獎徵答

收稿時間：97年12月3日　~　97年12月5日 14：00

說明：(1)解答請寫在答案稿紙上，並務必註明「**交件時間**」、「**班級**」、「**姓名**」。
(2)稿件寫完請投入敬業樓一樓**數學科辦公室**外**銀色的有獎徵答收稿信箱**內。
(3)答案稿紙可至數學科辦公室索取，**一張答案稿紙只能寫一個題目**的解答，如欲投稿兩題以上，請分別寫在不同的答案稿紙，否則不予評閱。
(4)答案稿紙上須註明投稿時間，投稿前**須請數學科任一位老師在投稿時間上簽證**否則視為當日最晚時間繳交。

1. 設 $a_1, a_2, ..., a_n$ 為互不相等之正整數，求證：$a_1^2+\frac{a_2^2}{2}+\frac{a_3^2}{3}+...+\frac{a_n^2}{n}\ge a_1+a_2+...+a_n$。

解：$\because a_1^2+1\ge 2a_1$

$$\frac{a_2^2}{2}+2\ge 2a_2$$

$$\frac{a_3^2}{3}+3\ge 2a_3$$

$$\cdots$$

$$\frac{a_n^2}{n}+n\ge 2a_n$$

相加可得 $a_1^2+\frac{a_2^2}{2}+\frac{a_3^2}{3}+...+\frac{a_n^2}{n}+(1+2+3+....+n)\ge 2(a_1+a_2+...+a_n)$

$\because a_1, a_2, ..., a_n$ 為互不相等之正整數

$\therefore a_1+a_2+...+a_n\ge 1+2+3+...+n$

故可知

$$a_1^2+\frac{a_2^2}{2}+\frac{a_3^2}{3}+...+\frac{a_n^2}{n}+(1+2+3+....+n)\ge (a_1+a_2+...+a_n)+(a_1+a_2+...+a_n)$$

$$\ge (a_1+a_2+...+a_n)+(1+2+3+...+n)$$

$$\therefore a_1^2+\frac{a_2^2}{2}+\frac{a_3^2}{3}+...+\frac{a_n^2}{n}\ge a_1+a_2+...+a_n$$

2. 8 個女孩與 25 個男孩圍成一圓圈，任意兩個女孩之間至少站兩個男孩，求共有幾種排列方法？

解：先排好女生 $\Rightarrow$ 7! 種

剩下的 8 個間隔：從某一女生 A 順時針數 每一間隔有 $a_1, a_2, ..., a_8$ 個男生

$a_1 + a_2 + ... + a_8 = 25$ （$a_i \ge 2, a_i \in N, i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$）

$\Leftrightarrow \quad (a_1 - 2) + (a_2 - 2) + ... + (a_8 - 2) = 9$

有非負整數解共 $H_9^8 = C_9^{16}$ 組

決定了男生站的位置，男生放入有 25! 種

$\Rightarrow \quad H_9^8 \cdot 25! \cdot 7! = C_9^{16} \cdot 25! \cdot 7! = \dfrac{16!25!}{9!}$ 種

註：324 王建詒提供解法

3. 若 D 是邊長為1的正三角形 ABC 的邊 $\overline{BC}$ 上的點，ΔABD 與 ΔACD 的內切圓半徑分別為 r_1, r_2，若 $r_1 + r_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{5}$，則滿足條件的點 D 有兩個，分別設為 D_1, D_2，則 D_1, D_2 之間的距離為何？

解：設 $\overline{BD} = x$，由餘弦定理得 $\overline{AD} = \sqrt{x^2 - x + 1}$。一方面，$S_{\Delta ABD} = \dfrac{1}{2} \cdot x \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，另一方面，

$S_{\Delta ABD} = \dfrac{1}{2}\left(1 + x + \sqrt{x^2 - x + 1}\right) r_1$，解得 $r_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{6}\left(1 + x - \sqrt{x^2 - x + 1}\right)$。

同理可得 $r_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{6}\left(2 - x - \sqrt{x^2 - x + 1}\right)$，從而有 $r_1 + r_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{6}\left(3 - 2\sqrt{x^2 - x + 1}\right)$。

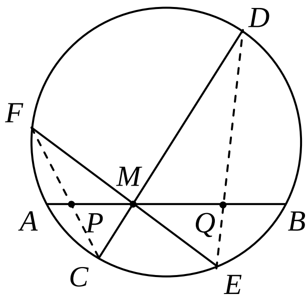
當 $x = \dfrac{1}{2}$ 時，$r_1 + r_2$ 有最大值，且最大值為 $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$，所以 $\dfrac{\sqrt{3}}{6} < r_1 + r_2 \le \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$。

由於 $r_1 + r_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{5}$，所以 $x^2 - x + \dfrac{19}{100} = 0$，設兩個根分別為 x_1, x_2，則

$\left|x_1 - x_2\right| = \sqrt{\left(x_1 + x_2\right)^2 - 4x_1x_2} = \dfrac{\sqrt{6}}{5}$。

4. 如下圖，$\overline{AB}$ 為圓內一弦，M 為 $\overline{AB}$ 上任一點($M \neq A$、$M \neq B$)，過 M 作圓的兩弦 $\overline{CD}$、$\overline{EF}$，

若 $\overline{CF}$ 交 $\overline{AB}$ 於 P、$\overline{DE}$ 交 $\overline{AB}$ 於 Q，試證明：$\dfrac{1}{\overline{MA}}-\dfrac{1}{\overline{MB}}=\dfrac{1}{\overline{MP}}-\dfrac{1}{\overline{MQ}}$ 。



證明：由恆等式 $\dfrac{\Delta MCP}{\Delta MEQ}\times\dfrac{\Delta MEQ}{\Delta MFP}\times\dfrac{MFP}{\Delta MDQ}\times\dfrac{\Delta MDQ}{\Delta MCP}=1$ 可得

$$\frac{\frac{1}{2}\times\overline{CM}\times\overline{CP}\times\sin C}{\frac{1}{2}\times\overline{EM}\times\overline{EQ}\times\sin E}\times\frac{\frac{1}{2}\times\overline{MQ}\times\overline{ME}\times\sin\angle QME}{\frac{1}{2}\times\overline{MF}\times\overline{MP}\times\sin\angle PMF}\times\frac{\frac{1}{2}\times\overline{FM}\times\overline{FP}\times\sin F}{\frac{1}{2}\times\overline{DM}\times\overline{DQ}\times\sin D}\times\frac{\frac{1}{2}\times\overline{MQ}\times\overline{MD}\times\sin\angle QMD}{\frac{1}{2}\times\overline{MP}\times\overline{MC}\times\sin\angle PMC}=1$$

即 $\dfrac{\overline{CP}}{\overline{EQ}}\times\dfrac{\overline{MQ}}{\overline{MP}}\times\dfrac{\overline{FP}}{\overline{DQ}}\times\dfrac{\overline{MQ}}{\overline{MP}}=1 \Rightarrow \overline{CP}\times\overline{FP}\times\overline{MQ}^2=\overline{EQ}\times\overline{DQ}\times\overline{MP}^2$

再由圓冪定理知 $\overline{AP}\times\overline{PB}\times\overline{MQ}^2=\overline{AQ}\times\overline{QB}\times\overline{MP}^2$ 即

$$\left(\overline{MA}-\overline{MP}\right)\left(\overline{MP}+\overline{MB}\right)\overline{MQ}^2=\left(\overline{MA}+\overline{MQ}\right)\left(\overline{MB}-\overline{MQ}\right)\overline{MP}^2$$

得 $\dfrac{1}{\overline{MA}}-\dfrac{1}{\overline{MB}}=\dfrac{1}{\overline{MP}}-\dfrac{1}{\overline{MQ}}$ 。

註：當 M 為 $\overline{AB}$ 中點時，其結果即為蝴蝶定理 $\overline{MP}=\overline{MQ}$ 。

5. 已知 a、b、c 皆為正整數，且拋物線 $y=ax^2+bx+c$ 與 x 軸有兩個不同的交點 A 和 B。若 A 和 B 到原點的距離均小於 1，則 $a+b+c$ 的最小值為多少？

解：

設拋物線與 x 軸交點為 $(\alpha,0)$ $(\beta,0)$，則 $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$，$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$，

因 $-\dfrac{b}{a}<0$，$\dfrac{c}{a}>0$，可知 $-1<\alpha<0$，$-1<\beta<0$，則

$-\dfrac{1}{4}<\alpha(\alpha+1)<0$，$-\dfrac{1}{4}<\beta(\beta+1)<0 \Rightarrow \alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)<\dfrac{1}{16}$

即 $0<\alpha\beta(\alpha\beta+\alpha+\beta+1)=\dfrac{c}{a}\left(\dfrac{c}{a}-\dfrac{b}{a}+1\right)=\dfrac{c}{a^2}(a-b+c)<\dfrac{1}{16}$

$\Rightarrow a^2>16c(a-b+c)$

由 $a-b+c>0$，$c\geq 1$，可知 $a^2>16 \Rightarrow a>4$，因此 a 最小的取值為 5，
又判別式 $D=b^2-4ac>0$，故 b 最小的取值為 5，c 最小的取值為 1

拋物線為 $y=5x^2+5x+1$，與 x 軸交於 $\left(\dfrac{-5-\sqrt{5}}{10},0\right)$，$\left(\dfrac{-5+\sqrt{5}}{10},0\right)$ 符合題意

故 $a+b+c$ 的最小值為 11