國 立 台 中 一 中 合 作 盃 數 學 金 頭 腦

第四十五次有獎徵答

收稿時間：97 年 10 月 22 日　~　97 年 10 月 24 日 14：00

說明：(1)解答請寫在答案稿紙上，並務必註明「**交件時間**」、「**班級**」、「**姓名**」。
(2)稿件寫完請投入敬業樓一樓**數學科辦公室**外**銀色的有獎徵答收稿信箱**內。
(3)答案稿紙可至數學科辦公室索取，**一張答案稿紙只能寫一個題目**的解答，
如欲投稿兩題以上，請分別寫在不同的答案稿紙，否則不予評閱。
(4)答案稿紙上須註明投稿時間，投稿前**須請數學科任一位老師在投稿時間上簽證**
否則視為當日最晚時間繳交。

1. 求滿足 $\begin{cases} a+b+c+d=12 \\ abcd=ab+ac+ad+bc+bd+cd+27 \end{cases}$ 的正整數解 $(a,b,c,d)=$？

解答：

設 $x=\sqrt{abcd}$　由算幾不等式可得

$$ab+ac+ad+bc+bd+cd \geq 6\sqrt[6]{(ab)(ac)(ad)(bc)(bd)(cd)}=6\sqrt[6]{(abcd)^3}=6x$$

所以 $x^2-27 \geq 6x \quad \Rightarrow \quad x \geq 9$ 或 $x \leq -3$ (不合)

又 $\dfrac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}=\sqrt{x} \geq 3$

即 $3 \geq 3$　此時等號成立　所以 $a=b=c=d=3$

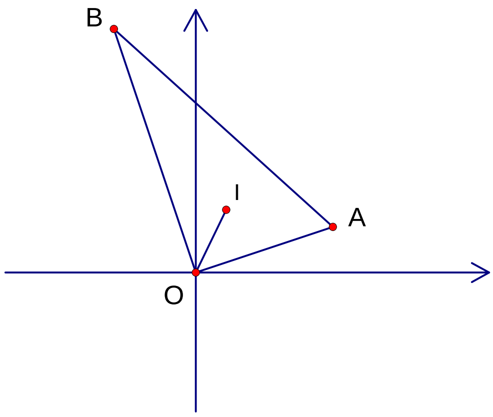
2. 設平面上ΔOAB滿足：

（1）A、B均為格子點（即x, y坐標皆為整數）且$\angle AOB = 90^\circ$且$O(0, 0)$

（2）ΔOAB的內心為$I(96p, 672p)$，其中p為質數，

試求滿足條件（1）及（2）之ΔOAB的個數？

解答：如圖



$\overline{OI}$的斜率為$\dfrac{672p}{96p} = 7 = \tan\alpha$（$\alpha$為$\overline{OM}$與$x$軸正向之夾角）

$\Rightarrow \ m_{\overline{OA}} = \tan(\alpha - 45^\circ)$(因為$\overline{OI}$為$\angle AOB$的角平分線，所以$\angle IOA = 45^\circ$)

$$= \frac{\tan\alpha - 1}{1 + \tan\alpha} = \frac{7-1}{1+7} = \frac{3}{4}$$

又因為$\angle AOB = 90^\circ$ 所以$m_{\overline{OB}} \times m_{\overline{OA}} = -1 \Rightarrow \ m_{\overline{OB}} = \dfrac{-4}{3}$

令 $A(4t, 3t)$、$B(-3s, 4s)$ $(s, t > 0)$，則 $t = 4t - 3t \in N$，$s = -3s + 4s \in N$

設ΔOAB之內切圓半徑為r $\Rightarrow r = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\overline{OM} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} 96p\sqrt{1+7^2} = 5p \times 96$

又 $\overline{OA} = 5t$、$\overline{OB} = 5s$、$\overline{AB} = 5\sqrt{t^2 + s^2}$，由 $\overline{OA} + \overline{OB} - \overline{AB} = 2r$

$\Rightarrow \ 5\sqrt{t^2 + s^2} = 5t + 5s - 2 \times 5p \times 96 \ \Rightarrow \ (t - 192p)(s - 192p) = 2^{11} \times 3^2 \times p^2$

$\because \ 5t > 2r$，$5s > 2r \ \Rightarrow \ t - 192p > 0$，$s - 192p > 0$

$\therefore \ \Delta OAB$之個數$= 2^{11} \times 3^2 \times p^2$之正因數的個數

(1) 當 $p \neq 2,3$ 共有 $(11+1)(2+1)(2+1) = 108$個

(2) 當 $p = 2$ 共有 $(13+1)(2+1) = 42$個

(3) 當 $p = 3$ 共有 $(11+1)(4+1) = 60$個

3. 已知數列$\{a_n\}$滿足$a_1 = p$，$a_2 = p+1$，$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = n - 20$，其中$p$是給定的實數，$n$是正整數，試求$n$的值，使得$a_n$的值最小。

解答：

令$b_n = a_{n+1} - a_n$，$n = 1, 2, \cdots$

由題設$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = n - 20$，有$b_{n+1} - b_n = n - 20$，且$b_1 = 1$

於是$\sum_{i=1}^{n-1}(b_{i+1} - b_i) = \sum_{i=1}^{n-1}(i - 20)$，即$b_n - b_1 = [1 + 2 + \cdots + (n-1)] - 2n(n-1)$。

$\therefore b_n = \dfrac{(n-1)(n-40)}{2} + 1$…………（※）

又$a_1 = p$，$a_2 = p+1$，則$a_3 = 2a_2 - a_1 + 1 - 20 = p - 17 < a_1 < a_2$。

$\therefore$當a_n的值最小時，應有$n \ge 3$，$a_n \le a_{n+1}$，且$a_n \le a_{n-1}$。

即$b_n = a_{n+1} - a_n \ge 0$，$b_{n-1} = a_n - a_{n-1} \le 0$。

由（※）式，得$\begin{cases}(n-1)(n-40) \ge -2 \\ (n-2)(n-41) \le -2\end{cases}$

由於$n \ge 3$，且$n \in N$，解得$\begin{cases} n \ge 40 \\ n \le 40 \end{cases}$，

$\therefore$當$n = 40$時，a_{40}的值最小。

4. 一張矩形紙片，內部有 100 個大小不一的矩形的洞，每一個洞的邊均與紙片的邊平行。如果無論這些洞如何分布，都能將紙片剪成k個沒有洞的矩形，試求k的最小值。

解答：

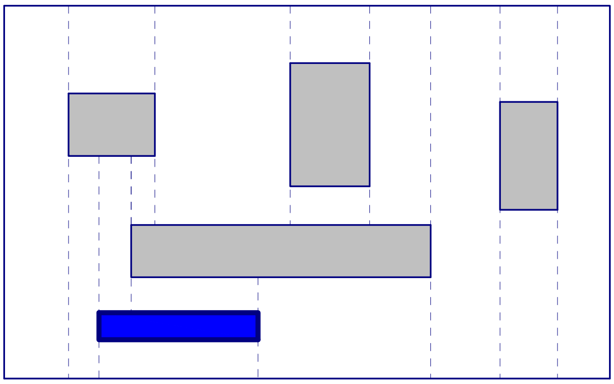
設紙片內部有n個矩形的洞，可證k的最小值為$3n+1$

（1） $1°$.當$n=1$時，顯然成立。

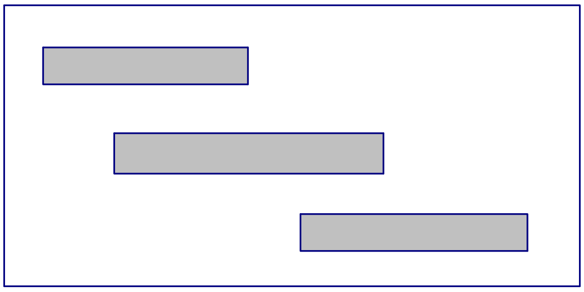
$2°$.設命題對$n-1$成立，即$k=3(n-1)+1$，

則當紙片有n個洞時，設第n個洞的下方沒有洞，於是$k=[3(n-1)+1]+1+1+1=3n+1$

（左方、右方、下方各多一個）



（2） 若每個洞均在前一個洞的右下方，且彼此各有一條豎邊在另一個洞的兩條豎邊之間，則最少可剪成$2n+1+(n-1)+1=3n+1$（個矩形）



由（1）（2）知k的最小值為$3\times100+1=301$

5. 設平面上有$3\times 2008!$個相異點和 2008 種不同顏色的線段，每兩個點之間恰可以用其中一種顏色的線段進行連接。證明：存在 3 個點，他們之間可用同一種顏色的線段連接。

解答：

用數學歸納法證明更一般的結論

如果平面上有$3\times n!$個相異點和n種不同顏色的線段，每兩個點之間恰可以用其中一種顏色的線段連接，那麼存在 3 個點，他們之間可用同一種顏色的線段連接。

1. 當$n=1$時，結論顯然成立。
2. 假設$n=k$時，結論顯然成立。

則當$n=k+1$時，從$3\times(k+1)!$個點中任取一個點A，它與剩下的$3\times(k+1)!$-1 個點中的每個點用$k+1$種顏色的線段連接，根據抽屜原理，知它至少與$\left[\frac{3\times(k+1)!-1}{k+1}\right]+1=3\cdot k!$個點用同一種顏色的線段$X$連接。

如果在這$3\times k!$點中存在兩個點B, C也用顏色的線段X連接，則三個點A, B, C之間用同一種顏色的線段X連接，結論成立。

如果在這$3\times k!$點中不存在兩個點，它們之間用同一種顏色的線段X連接。那麼其中任意兩個點都用剩下的k種顏色的線段連接，由歸納假設知其中必存在 3 個點，它們之間用同一種顏色的線段連接，結論成立。

特別地，對$n=2008$，即題中結論也成立。

註：原題目：某星球上有$3\times 2008!$名居民和 2008 種語言，每兩名居民之間恰可以用其中一種語言進行交流。證明：存在 3 名居民，他們之間可用同一種語言進行交流。

但因題意有些不清楚，故將居民更正為相異的點；語言更正為不同的顏色線段。