

國立台中一中合作盃數學金頭腦

第四十五次有獎徵答

收稿時間：97年10月22日 ~ 97年10月24日 14:00

- 說明：(1)解答請寫在答案稿紙上，並務必註明「交件時間」、「班級」、「姓名」。
- (2)稿件寫完請投入敬業樓一樓數學科辦公室外銀色的有獎徵答收稿信箱內。
- (3)答案稿紙可至數學科辦公室索取，一張答案稿紙只能寫一個题目的解答，如欲投稿兩題以上，請分別寫在不同的答案稿紙，否則不予評閱。
- (4)答案稿紙上須註明投稿時間，投稿前須請數學科任一位老師在投稿時間上簽證，否則視為當日最晚時間繳交。

1. 求滿足
$$\begin{cases} a+b+c+d=12 \\ abcd=ab+ac+ad+bc+bd+cd+27 \end{cases}$$
 的正整數解 $(a, b, c, d) = ?$
2. 設平面上 $\triangle OAB$ 滿足：
 - (1) A 、 B 均為格子點（即 x, y 坐標皆為整數）且 $\angle AOB = 90^\circ$ 且 $O(0, 0)$
 - (2) $\triangle OAB$ 的內心為 $I(96p, 672p)$ ，其中 p 為質數，試求滿足條件 (1) 及 (2) 之 $\triangle OAB$ 的個數？
3. 已知數列 $\{a_n\}$ 滿足 $a_1 = p$ ， $a_2 = p+1$ ， $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = n - 20$ ，其中 p 是給定的實數， n 是正整數，試求 n 的值，使得 a_n 的值最小。
4. 一張矩形紙片，內部有 100 個大小不一的矩形的洞，每一個洞的邊均與紙片的邊平行。如果無論這些洞如何分布，都能將紙片剪成 k 個沒有洞的矩形，試求 k 的最小值。
5. 設平面上有 $3 \times 2008!$ 個相異點和 2008 種不同顏色的線段，每兩個點之間恰可以用其中一種顏色線段進行連接。證明：存在 3 個點，他們之間可用同一種顏色線段連接。