國 立 台 中 一 中 合 作 盃 數 學 金 頭 腦

第四十四次有獎徵答

收稿時間：97 年 5 月 28 日 ～ 97 年 5 月 30 日 14：00

說明：(1)解答請寫在答案稿紙上，並務必註明「**交件時間**」、「**班級**」、「**姓名**」。
(2)稿件寫完請投入敬業樓一樓**數學科辦公室**外**銀色的有獎徵答收稿信箱**內。
(3)答案稿紙可至數學科辦公室索取，**一張答案稿紙只能寫一個題目**的解答，如欲投稿兩題以上，請分別寫在不同的答案稿紙，否則不予評閱。
(4)答案稿紙上須註明投稿時間，投稿前**須請數學科任一位老師在投稿時間上簽證**否則視為當日最晚時間繳交。

1.若 a 、 b 、 $c \in R^+$ ，且滿足 $\dfrac{kabc}{a+b+c} \le (a+b)^2+(a+b+4c)^2$ ，求 k 的最大值。

解:由均值不等式得 $(a+b)^2+(a+b+4c)^2=(a+b)^2+[(a+2c)+(b+2c)]^2$

$$\ge (2\sqrt{ab})^2+(2\sqrt{2ac}+2\sqrt{2bc})^2=4ab+4\cdot 2ac+4\cdot 2bc+2\cdot 2\cdot 2\cdot 2c\cdot\sqrt{ab}$$

$$=4ab+8ac+8bc+16c\sqrt{ab},$$

$$\therefore \frac{(a+b)^2+(a+b+4c)^2}{abc}\cdot(a+b+c)\ge\frac{4ab+8ac+8bc+16c\sqrt{ab}}{abc}\cdot(a+b+c)$$

$$=(\frac{4}{c}+\frac{8}{b}+\frac{8}{a}+\frac{16}{\sqrt{ab}})(a+b+c)$$

$$=8(\frac{1}{2c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}+\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{ab}})(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{b}{2}+c)$$

$$\ge 8(5\cdot\sqrt[5]{\frac{1}{2a^2b^2c}})\cdot(5\cdot\sqrt[5]{\frac{a^2b^2c}{2^4}})=100,$$

等號成立當且僅當 $a=b=2c>0$ ，故 k 的最大值為 100

2.設 $x\in R$ ，若 $\frac{\sin^4 x}{9}+\frac{\cos^4 x}{16}=\frac{1}{25}$ ，則 $\frac{\sin^{3456} x}{3^{3454}}+\frac{\cos^{3456} x}{4^{3454}}=$ ？

解：已知 $\frac{\sin^4 x}{9}+\frac{\cos^4 x}{16}=\frac{1}{25}$ $\cdots$ ①

將 ① 改寫成 $1=\sin^4 x+\cos^4 x+\frac{16}{9}\sin^4 x+\frac{9}{16}\cos^4 x$ 。

而 $1=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2=\sin^4 x+\cos^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x$ 。

相減得 $\frac{16}{9}\sin^4 x-2\sin^2 x\cos^2 x+\frac{9}{16}\cos^4 x=\left(\frac{4}{3}\sin^2 x-\frac{3}{4}\cos^2 x\right)^2=0$ 。即 $\frac{\sin^2 x}{3^2}=\frac{\cos^2 x}{4^2}$

故可令 $k=\frac{\sin^4 x}{3^4}=\frac{\cos^4 x}{4^4}$ ， 則由 ① 知，$9k+16k=25k=\frac{1}{25}$ ， 得 $k=\frac{1}{5^4}$

故 $\frac{\sin^{3456} x}{3^{3454}}+\frac{\cos^{3456} x}{4^{3454}}=9k^{864}+16k^{864}=25k^{864}=5^2\cdot\frac{1}{5^{3456}}=\frac{1}{5^{3454}}$ 。

3. 設 x, y 均為實數，試求方程組 $\begin{cases} x(x^2+y^2)+(2008^2+2009^2-2)x-2y=4016(x^2+y^2) \\ y(x^2+y^2)-2x-(2008^2+2009^2-2)y=2(x^2+y^2) \end{cases}$ 的所有解。

解答：

很顯然，$x=y=0$ 為其解

同樣也可得，$x=0, y\neq 0$ 及 $y=0, x\neq 0$ 不為其解

若 $x^2+y^2\neq 0$ 時

可整理方程組 $\begin{cases} x(x^2+y^2)+(2008^2+2009^2-2)x-2y=4016(x^2+y^2) \\ y(x^2+y^2)-2x-(2008^2+2009^2-2)y=2(x^2+y^2) \end{cases}$

得 $\begin{cases} x+\dfrac{(2008^2+2009^2-2)x-2y}{x^2+y^2}=4016 \\ y-\dfrac{2x+(2008^2+2009^2-2)y}{x^2+y^2}=2 \end{cases}$

並將其複數化，可得

$[x+\dfrac{(2008^2+2009^2-2)x-2y}{x^2+y^2}]+[y-\dfrac{2x+(2008^2+2009^2-2)y}{x^2+y^2}]i=4016+2i$

$\Rightarrow x+yi+[\dfrac{(2008^2+2009^2-2)(x-yi)}{x^2+y^2}-\dfrac{2i(x-yi)}{x^2+y^2}]=4016+2i$

$\Rightarrow x+yi+\dfrac{(2008^2+2009^2-2-2i)(x-yi)}{x^2+y^2}=4016+2i$

令 $z=x+yi \therefore \dfrac{1}{z}=\dfrac{x-yi}{x^2+y^2}$

所以原式為 $z+\dfrac{2008^2+2009^2-2-2i}{z}=4016+2i$

$\Rightarrow z^2-(4016+2i)z+(2008^2+2009^2-2-2i)=0$

$\Rightarrow (z-2008-i)^2=-2009^2+1+4018i=(1+2009i)^2$

$\Rightarrow z-2008-i=1+2009i$ ，或 $z-2008-i=-1-2009i$

得 $z=2009+2010i$ ，或 $z=2007-2008i$

故 $(x,y)=(2007,-2008)$ ，或 $(2009,2010)$ ，或 $(0,0)$

4.計算 $S=\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty}\frac{1}{2^{x+y+|x-y|}}$ 的值。

解：將 S 分成三部分： $y=x$ ， $y=x+d$ ， $y=x-d$ ，其中 d 為正整數

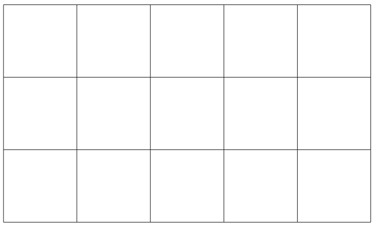
第一部分 $S_1=\sum_{x=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2x}}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$

第二部分 $S_2=\sum_{d=1}^{\infty}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2x+2d}}=\sum_{d=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2d}}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2x}}=\frac{4}{3}\sum_{d=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2d}}=\frac{4}{9}$

第三部分 S_3 為 S_2 中 x 與 y 互換，故 $S_3=S_2$

因此， $S=S_1+2S_2=\frac{20}{9}$

5. 如圖，有一個 15 格的長方形，現將 1~15 的正整數不重複全部填入 15 格之中，且滿足以下二個條件：(1)左右相鄰兩格的數字右方大於左方(2)上下相鄰兩格的數字上方大於下方。
試問符合題意的填入法有幾種。



解：$\dfrac{2\times 15!}{5!\times 6!\times 7!}$=6006