國 立 台 中 一 中 合 作 盃 數 學 金 頭 腦

第四十三次有獎徵答

收稿時間：97 年 4 月 16 日 ~ 97 年 4 月 18 日 14：00

說明：(1)解答請寫在答案稿紙上，並務必註明「**交件時間**」、「**班級**」、「**姓名**」。
(2)稿件寫完請投入敬業樓一樓**數學科辦公室**外**銀色的有獎徵答收稿信箱**內。
(3)答案稿紙可至數學科辦公室索取，**一張答案稿紙只能寫一個題目**的解答，如欲投稿兩題以上，請分別寫在不同的答案稿紙，否則不予評閱。
(4)答案稿紙上須註明投稿時間，投稿前**須請數學科任一位老師在投稿時間上簽證**否則視為當日最晚時間繳交。

1.設 p 是質數，且 p^2+71 的不同正因數的個數不超過10個．求 p 之值。

解：(1)當 $p=2$ 時，$p^2+71=75=3\times5^2$，有 $(1+1)(2+1)=6$ 個正因數；

當 $p=3$ 時，$p^2+71=80=2^4\times5$，有 $(4+1)(1+1)=10$ 個正因數。

所以 $p=2$ 、 $p=3$ 滿足條件。

(2)當 $p>3$ 時，$p^2+71=(p-1)(p+1)+72$。

其中 p 為奇質數，所以 $(p-1)$ 與 $(p+1)$ 是相鄰的兩個偶數，從而必然有一個 2 的倍數和 4 個倍數，還必然有一個 3 的倍數，從而 $(p-1)(p+1)$ 是 24 的倍數。

設 $p^2+71=24\times m=2^3\times3\times m$，其中 $m\geq4$。

若 m 中有不同於 2 、 3 的質因數，則 p^2+71 的正因數個數 $\geq(3+1)(1+1)(1+1)>10$；

若 m 中含有質因數 3，則則 p^2+71 的正因數個數 $\geq(3+1)(2+1)>10$；

若 m 中僅有質因數 2，則 p^2+71 的正因數個數 $\geq(5+1)(1+1)>10$。

所以 $p>3$ 不滿足條件。

故質數 p 是 2 或 3。

2.若數列$\{a_n\}$恆為正實數，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$，$a_0=\cos\theta$，且$2a_n^2=1+a_{n-1}, \forall n\geq 1$；又$b_n=4^n(1-a_n)$，

則$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=$？

解：$\because a_0=\cos\theta$，$a_n=\sqrt{\frac{1+a_{n-1}}{2}}$

$$a_1=\sqrt{\frac{1+a_0}{2}}=\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}=\cos\frac{\theta}{2}$$

$$a_2=\sqrt{\frac{1+a_1}{2}}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\theta}{2}}{2}}=\cos\frac{\theta}{2^2}$$

…

$$a_n=\sqrt{\frac{1+a_{n-1}}{2}}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\theta}{2^{n-1}}}{2}}=\cos\frac{\theta}{2^n}$$

$$\therefore b_n=4^n(1-a_n)=4^n(1-\cos\frac{\theta}{2^n})=\frac{4^n(1-\cos^2\frac{\theta}{2^n})}{(1+\cos\frac{\theta}{2^n})}=\frac{4^n\sin^2\frac{\theta}{2^n}}{(1+\cos\frac{\theta}{2^n})}$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty}[\frac{4^n\sin^2\frac{\theta}{2^n}}{(1+\cos\frac{\theta}{2^n})}]=\lim_{n\to\infty}[\frac{\theta^2}{(1+\cos\frac{\theta}{2^n})}\times(\frac{\sin\frac{\theta}{2^n}}{\frac{\theta}{2^n}})^2]=\frac{\theta^2}{2}$$

3.設 $S=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le\dfrac{\pi}{2},0\le y\le\dfrac{\pi}{2}\right\}$，若 $(x,y)\in S$ 且滿足 $\sin^2 x-\sin x\sin y+\sin^2 y\le\dfrac{3}{4}$，

則所有 (x,y) 點所形成的面積為何？

解： $\left(\sin x-\dfrac{1}{2}\sin y\right)^2+\dfrac{3}{4}\sin^2 y\le\dfrac{3}{4}$

$$\Rightarrow\left(\sin x-\frac{1}{2}\sin y\right)^2\le\frac{3}{4}\cos^2 y$$

$$\Rightarrow-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos y\le\sin x-\frac{1}{2}\sin y\le\frac{\sqrt{3}}{2}\cos y$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}\sin y-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos y\le\sin x\le\frac{1}{2}\sin y+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos y$$

$$\Rightarrow\sin\left(y-\frac{\pi}{3}\right)\le\sin x\le\sin\left(y+\frac{\pi}{3}\right)$$

討論：

(1) 當 $y\le\dfrac{\pi}{6}$ 時，由 $\sin\left(y-\dfrac{\pi}{3}\right)\le\sin x\ \Rightarrow\ y-\dfrac{\pi}{3}\le x\ \Rightarrow\ x-y\ge-\dfrac{\pi}{3}$

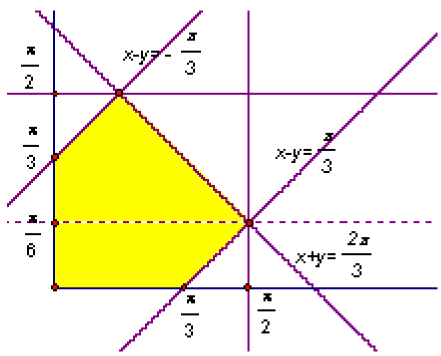
又 $\sin x\le\sin\left(y+\dfrac{\pi}{3}\right)\ \Rightarrow\ x\le y+\dfrac{\pi}{3}\ \Rightarrow\ x-y\le\dfrac{\pi}{3}$

(2) 當 $y\ge\dfrac{\pi}{6}$ 時，由 $\sin\left(y-\dfrac{\pi}{3}\right)\le\sin x\ \Rightarrow\ y-\dfrac{\pi}{3}\le x\ \Rightarrow\ x-y\ge-\dfrac{\pi}{3}$

又 $\sin x\le\sin\left(y+\dfrac{\pi}{3}\right)\ \Rightarrow\ \sin x\le\sin\left[\pi-\left(y+\dfrac{\pi}{3}\right)\right]\ \Rightarrow\ \sin x\le\sin\left(\dfrac{2}{3}\pi-y\right)$

$\Rightarrow\ x\le\dfrac{2}{3}\pi-y\ \Rightarrow x+y\le\dfrac{2}{3}\pi$

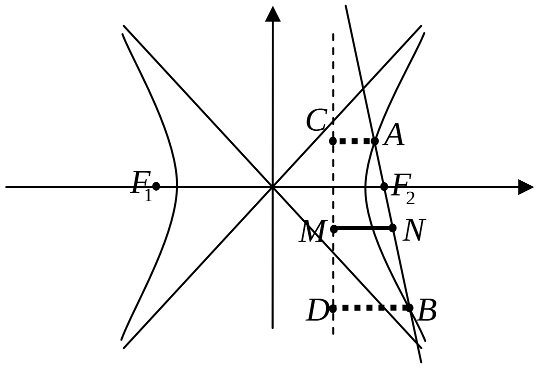
滿足上面條件的圖形如右，其面積為 $\dfrac{\pi^2}{6}$



4. F_1、F_2 為雙曲線 $x^2-3y^2=3$ 的焦點，直線 L 通過 F_2 且與靠近 F_2 的一支相交於 A、B 兩點，

求 $\overline{AF_1}+\overline{BF_1}$ 的最小值為何？(需詳列計算過程或證明)

解 1：如右圖所示



因 $\overline{AF_1}-\overline{AF_2}=2\sqrt{3}$ 且 $\overline{BF_1}-\overline{BF_2}=2\sqrt{3}$

故當 $\overline{AF_1}+\overline{BF_1}$ 取最小值時，$\overline{AF_2}+\overline{BF_2}$ 亦取最小值

由雙曲線的離心率定義知

$\overline{AF_2}=e\overline{AC}$ 、 $\overline{BF_2}=e\overline{BD}$ ，

其中 $\overleftrightarrow{CD}$ 為此雙曲線右支的準線，且 $\overline{AC}\perp\overleftrightarrow{CD}$ 、 $\overline{BD}\perp\overleftrightarrow{CD}$ 。

M、N 為梯形 ABDC 的中線，可知當 $\overline{AB}\perp\overleftrightarrow{F_1F_2}$ 時，$\overline{MN}$ 有最小值 $2-\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}$

此時 $\overline{AF_2}+\overline{BF_2}$ 有最小值 $2e\overline{MN}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ ，故 $\overline{AF_1}+\overline{BF_1}$ 的最小值為 $4\sqrt{3}+\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{14}{\sqrt{3}}$

5.在平面上給定 7 點，則在它們之間最少要連接多少條線段，才能使得任意 3 點之中都兩點間連有一條線段？試畫出一個合乎所求的連線圖。

解：設 7 點中 A 點連出的線段最少，共連出 k 條線段 $\overline{AB_i}$ ，$i=1,2,3,\ldots,k$

其餘 $6-k$ 個點與 A 均無連線，則這 $6-k$ 個點中任兩點間均有連線，

故圖中連線總數 S

$$
\begin{aligned}
S &\geq \frac{1}{2}\left[(k+1)k+(6-k)(5-k)\right] \\
&= k^2-5k+15 \\
&= \left(k-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{35}{4} \\
&\geq \left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{35}{4} \\
&= 9
\end{aligned}
$$

如下圖：共有 9 條線段滿足條件，故最小要連 9 條線段