國 立 台 中 一 中 合 作 盃 數 學 金 頭 腦

第四十二次有獎徵答

收稿時間：96 年 12 月 5 日 ~ 96 年 12 月 7 日 14：00

說明：(1)解答請寫在答案稿紙上，並務必註明「**交件時間**」、「**班級**」、「**姓名**」。
(2)稿件寫完請投入敬業樓一樓**數學科辦公室**外**銀色的有獎徵答收稿信箱**內。
(3)答案稿紙可至數學科辦公室索取，**一張答案稿紙只能寫一個題目**的解答，如欲投稿兩題以上，請分別寫在不同的答案稿紙，否則不予評閱。
(4)答案稿紙上須註明投稿時間，投稿前**須請數學科任一位老師在投稿時間上簽證**否則視為當日最晚時間繳交。

1. 設 a,b,c 為整數且 $2000 \le a,b,c \le 3000$，若 $a^2+b^2=c^2$ 且 a,b,c 的最大公因數為 1。求 $(a,b,c)=$？

解：由畢氏數的特性：

可假設 $a=2pq, b=p^2-q^2, c=p^2+q^2$，其中 $p,q(p>q)$ 是互質的正整數，且 p,q 奇偶性互異。

$\because c^2=a^2+b^2>2\times 2000^2$

$\therefore 2828 \approx 2000\sqrt{2} < c = p^2+q^2 < 3000$ ①

又 $2000 < p^2-q^2$ ②

①＋②得 $4828 < 2p^2$

$\therefore p \ge 50$ ③

又 $2000 < 2pq$ ④

①＋④得 $(p-q)^2 < 1000$

$\therefore p-q \le 31$ ⑤

由 ③，⑤ 得 $q \ge 19$

從而 $p^2+19^2 \le p^2+q^2 < 3000$ 即 $p^2 < 2639$ $\therefore p \le 51$。於是 $2q=\dfrac{2pq}{p}>\dfrac{2000}{51}$ 得 $q \ge 20$。

從而 $p^2+20^2 \le p^2+q^2 < 3000$ 即 $p^2 < 2600$ $\therefore p \le 50$。故 $p=50$。

於是 $50^2+q^2<3000$ 即 $q^2<500$ $\therefore q \le 22$。

又$\because p$ 為偶數 $\therefore q$ 為奇數，故 $q=21$。

因而 $a=2100, b=2059, c=2941$。 故 $(a,b,c)=(2100,2059,2941)$ 或 $(2059,2100,2941)$。

2. 設 $a,b,c\in Z$ ，且方程組 $\begin{cases}2x-y+a=0\\x^2-xy+y^2=b\end{cases}$ 之解為有理數，求證其解均為整數。

解：(A) $2x-y+a=0\Rightarrow x=\dfrac{y-a}{2}$ ，代入 $x^2-xy+y^2=b$ 式中

$$\Rightarrow y^2-y\left(\frac{y-a}{2}\right)+\left(\frac{y-a}{2}\right)^2-b=0$$

$$\Rightarrow 3y^2=4b-a^2\cdots\cdots①$$

$$\Rightarrow (3y)^2=3\left(4b-a^2\right)$$

$\because (3y)^2\in Z$ ，$\therefore 3y\in Z$

$\because 3\left|(3y)\right.$ ，$\therefore y\in Z$

(B) 由①知，a 及 y 為兩偶數或兩奇數

($\because y$ 為奇數 $\Rightarrow 3y^2$ 為奇數 $\Rightarrow 4b-a^2$ 為奇數，$\therefore a^2$ 為奇數 $\Rightarrow a$ 為奇數
同理 y 為偶數 $\Rightarrow a$ 為偶數)

$\therefore y-a$ 為偶數 $\Rightarrow x=\dfrac{y-a}{2}\in Z$

3. 設x,y,z為正實數，滿足$x^2+y^2+z^2=1$，$n\in N$。證明：$\dfrac{x}{1-x^{2n}}+\dfrac{y}{1-y^{2n}}+\dfrac{z}{1-z^{2n}}\geq\dfrac{(2n+1)^{1+\frac{1}{2n}}}{2n}$。

證：

將$x^2+y^2+z^2=1$帶入原不等式

即証 $\dfrac{x}{1-x^{2n}}+\dfrac{y}{1-y^{2n}}+\dfrac{z}{1-z^{2n}}\geq\dfrac{(2n+1)^{1+\frac{1}{2n}}}{2n}\cdot(x^2+y^2+z^2)$

根據對稱性只要分別證明

$\dfrac{x}{1-x^{2n}}\geq\dfrac{(2n+1)^{1+\frac{1}{2n}}}{2n}\cdot x^2$ ；$\dfrac{y}{1-y^{2n}}\geq\dfrac{(2n+1)^{1+\frac{1}{2n}}}{2n}\cdot y^2$ ；$\dfrac{z}{1-z^{2n}}\geq\dfrac{(2n+1)^{1+\frac{1}{2n}}}{2n}\cdot z^2$

因為證明$\dfrac{x}{1-x^{2n}}\geq\dfrac{(2n+1)^{1+\frac{1}{2n}}}{2n}\cdot x^2$ 相當於證明 $2n\geq(2n+1)^{1+\frac{1}{2n}}\cdot x(1-x^{2n})$

根據算幾不等式可得證 $2n+(2n+1)^{1+\frac{1}{2n}}x^{2n+1}=1+1+1+....+1+(2n+1)^{\frac{2n+1}{2n}}x^{2n+1}$

（1 共有$2n$個）

$\geq(2n+1)\cdot\sqrt[2n+1]{1\cdot1\cdot1......\cdot1\cdot(2n+1)^{\frac{2n+1}{2n}}x^{2n+1}}=(2n+1)\cdot(2n+1)^{\frac{1}{2n}}x=(2n+1)^{1+\frac{1}{2n}}x$

（1 共有$2n$個）

同理可證其餘兩個不等式

由此三個不等式相加即得證原命題。

4. 設 $M-ABCD$ 為四角錐，底面 $ABCD$ 為正方形，且 $\overline{MA}=\overline{MD}$ ，$\overline{MA}\perp\overline{AB}$ ，ΔAMD 面積為 1，

試求能放入這個四角錐內之最大球之半徑。

解：

(1) $\because \overline{MA}\perp\overline{AB}$ ，且 $\overline{AD}\perp\overline{AB}$ ，$\therefore \overline{AB}$ 垂直平面 MAD，

進一步可知平面 MAD 垂直於底面 $ABCD$。

設 E、F 分別為 $\overline{AD}$ $\overline{BC}$ 之中點，則 $\overline{ME}\perp\overline{AD}$ ，

因此 $\overline{ME}$ 垂直底面 $ABCD$，$\overline{ME}\perp\overline{EF}$

(2) 設球 O 是與平面 MAD、平面 MBC、及底面 $ABCD$ 皆相切的球，

不失一般性，假設球心 O 在平面 MEF 上，則 O 為 ΔMEF 之內心，

設球 O 之半徑為 r，則 $r=\dfrac{2\Delta MEF}{\overline{ME}+\overline{EF}+\overline{MF}}$

令 $\overline{AD}=a=\overline{EF}$ ，又 $\Delta AMD=1$，因此 $\overline{ME}=\dfrac{2}{a}$

$\overline{MF}=\sqrt{\overline{ME}^2+\overline{EF}^2}=\sqrt{\left(\dfrac{2}{a}\right)^2+a^2}$ ，$\therefore r=\dfrac{2}{a+\dfrac{2}{a}+\sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+a^2}}<\dfrac{2}{2+2\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$ ，

當 $a=\dfrac{2}{a}$ 時，上式等號成立，即 $\overline{AD}=\overline{ME}=\sqrt{2}$ ，

則同時與平面 MAD、MBC、及底面 $ABCD$ 皆相切的球之最大半徑為 $\sqrt{2}-1$

(3) 作 $\overline{OG}\perp\overline{ME}$ 於 G，則 $\overline{OG}$ 平行平面 MAB，

因此 G 到平面 MAB 之距離等於 O 到平面 MAB 之距離

作 $\overline{GH}\perp\overline{MA}$ 於 H，故 $\overline{GH}$ 等於 G 到平面 MAB 之距離

又 $\Delta MHG \sim \Delta MEA$ ，得知 $\dfrac{\overline{GH}}{\overline{AE}}=\dfrac{\overline{MG}}{\overline{MA}}$

另一方面，$\overline{MG}=\overline{ME}-\overline{GE}=1$ ，$\overline{AE}=\dfrac{1}{2}\overline{AD}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ，$\overline{MA}=\sqrt{\overline{ME}^2+\overline{AE}^2}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ ，

故 $\overline{GH}=\dfrac{\overline{AE}\cdot\overline{MG}}{\overline{MA}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}>\sqrt{2}-1$ ，即 O 到平面 MAB 之距離大於 $\sqrt{2}-1$

同理 O 到平面 MCD 之距離大於 $\sqrt{2}-1$，因此球在四角錐 $M-ABCD$ 不可能再更大，

得知最大球半徑為 $\sqrt{2}-1$。

5. 將 1 到 10 排成一列，但有以下限制：

（1）1 不排首，10 不排末；（2）1, 2, 3 不在 4 之後，8, 9, 10 不在 7 之前，

問共有多少種排法？

解：$\frac{10!}{4!4!}\times 3!\times 3!-\frac{9!}{3!4!}\times 2!\times 3!\times 2+\frac{8!}{3!3!}\times 2!\times 2!=170800$

（任意）－（1 在首或 10 在末）＋（1 在首且 10 在末）。