

國立台中一中合作盃數學金頭腦

第四十二次有獎徵答

收稿時間：96年12月5日 ~ 96年12月7日 14:00

- 說明：(1)解答請寫在答案稿紙上，並務必註明「交件時間」、「班級」、「姓名」。
- (2)稿件寫完請投入敬業樓一樓數學科辦公室外銀色的有獎徵答收稿信箱內。
- (3)答案稿紙可至數學科辦公室索取，一張答案稿紙只能寫一個題目的解答，如欲投稿兩題以上，請分別寫在不同的答案稿紙，否則不予評閱。
- (4)答案稿紙上須註明投稿時間，投稿前須請數學科任一位老師在投稿時間上簽證，否則視為當日最晚時間繳交。

1. 設 a, b, c 為整數且 $2000 \leq a, b, c \leq 3000$ ，若 $a^2 + b^2 = c^2$ 且 a, b, c 的最大公因數為 1。求 $(a, b, c) = ?$
2. 設 $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ，且方程組 $\begin{cases} 2x - y + a = 0 \\ x^2 - xy + y^2 = b \end{cases}$ 之解為有理數，求證其解均為整數。
3. 設 x, y, z 為正實數，滿足 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ， $n \in \mathbb{N}$ 。證明：
$$\frac{x}{1-x^{2n}} + \frac{y}{1-y^{2n}} + \frac{z}{1-z^{2n}} \geq \frac{(2n+1)^{1+\frac{1}{2n}}}{2n}。$$
4. 設 $M-ABCD$ 為四角錐，底面 $ABCD$ 為正方形，且 $\overline{MA} = \overline{MD}$ ， $\overline{MA} \perp \overline{AB}$ ， ΔAMD 面積為 1，試求能放入這個四角錐內之最大球之半徑。
5. 將 1 到 10 排成一列，但有以下限制：
(1) 1 不排首，10 不排末；(2) 1, 2, 3 不在 4 之後，8, 9, 10 不在 7 之前，問共有多少種排法？