國 立 台 中 一 中 合 作 盃 數 學 金 頭 腦

第四十一次有獎徵答

收稿時間：96 年 10 月 17 日 ～ 96 年 10 月 19 日 14：00

說明：(1)解答請寫在答案稿紙上，並務必註明「**交件時間**」、「**班級**」、「**姓名**」。
(2)稿件寫完請投入敬業樓一樓**數學科辦公室外銀色的有獎徵答收稿信箱**內。
(3)答案稿紙可至數學科辦公室索取，**一張答案稿紙只能寫一個題目**的解答，如欲投稿兩題以上，請分別寫在不同的答案稿紙，否則不予評閱。
(4)答案稿紙上須註明投稿時間，投稿前**須請數學科任一位老師在投稿時間上簽證**否則視為當日最晚時間繳交。

1. 設 $a,b,c\in R^{+}$，$abc=8$。

試求 $\dfrac{a^2}{\sqrt{a^3b^3+a^3+b^3+1}}+\dfrac{b^2}{\sqrt{b^3c^3+b^3+c^3+1}}+\dfrac{c^2}{\sqrt{a^3c^3+a^3+c^3+1}}$ 之最小值=？

2. 數列 $\{a_n\}$ 滿足：$a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_{n+1}=\dfrac{na_n}{(n+1)(na_n+1)}$；

令 $x_k=a_1+a_2+\cdots+a_k$，$y_k=\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_k}$， $k=1,2,\cdots$。 求 $\sum_{k=1}^{n}x_ky_k$。

3. 求所有的正整數 n，使得 $n+36$ 是一個完全平方數，且除了 2 或 3 以外，n 沒有其他的質因數。

4. 已知 ΔABC，由頂點 A 分別向 $\angle B$ 和 $\angle C$ 的角平分線引垂線，垂足分別為 A_1 和 A_2。

同理，定義 B_1，B_2 和 C_1，C_2。

證明：$2(\overline{A_1A_2}+\overline{B_1B_2}+\overline{C_1C_2})=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}$。

5. 已知正整數列 $\{a_n\}$ 滿足條件：對於任意正整數 n，從集合 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 中不重複地任取若干個數，這些數之間經過加減運算後所得的數的絕對值為互不相同的正整數，且這些正整數與 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 一起恰好是 1 至 S_n 全體自然數組成的集合，其中 S_n 為數列 $\{a_n\}$ 的前 n 項和。求 $a_n=$？