

# 台灣省立台中一中 合作盃數學金頭腦

## 第四次有獎徵答

收稿時間:87年6月8日~87年6月12日中午

1. 設函數  $y = f(x)$  對一切實數  $x$  都滿足  $f(3+x) = f(3-x)$

且方程式  $f(x) = 0$  恰有六個不同的實根，則這六個的實根之和是多少？

2. 已知  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$  為固定的整數， $m$  是整數且  $5 \nmid m$ ，

使得  $5 \mid am^3 + bm^2 + cm + d$ ，

求證：存在一正整數  $x$ ，使得  $5 \mid dx^3 + cx^2 + bx + a$

3. 設  $\triangle ABC$  之三邊長為  $\overline{BC} = a$ ， $\overline{CA} = b$ ， $\overline{AB} = c$ ，其對應中線長分別為  $m_a$ ， $m_b$ ， $m_c$ ，

求證  $\frac{m_a^2}{b^2 + c^2} + \frac{m_b^2}{c^2 + a^2} + \frac{m_c^2}{a^2 + b^2} \leq \frac{9}{8}$

4. 設  $O$  為拋物線的頂點， $F$  為焦點且  $\overline{PQ}$  為過  $F$  之弦，

已知  $\overline{OF} = a$ ， $\overline{PQ} = b$ ，求  $\triangle OPQ$  的面積。

5. 已知  $\theta$  為銳角， $\forall n \in N, n \geq 3$ ，

求證： $\sin^n \theta + \cos^n \theta \geq 2^{1-\frac{n}{2}}$