國 立 台 中 一 中 合 作 盃 數 學 金 頭 腦

第四十次有獎徵答

收稿時間：96 年 6 月 4 日 ~ 96 年 6 月 6 日 12：00

說明：(1)解答請寫在答案稿紙上，並務必註明「**交件時間**」、「**班級**」、「**姓名**」。
(2)稿件寫完請投入敬業樓一樓**數學科辦公室**外**銀色的有獎徵答收稿信箱**內。
(3)答案稿紙可至數學科辦公室索取，**一張答案稿紙只能寫一個題目**的解答，如欲投稿兩題以上，請分別寫在不同的答案稿紙，否則不予評閱。
(4)答案稿紙上須註明投稿時間，投稿前**須請數學科任一位老師在投稿時間上簽證**否則視為當日最晚時間繳交。

1. 設 $z = x - yi \quad (x, y \in R)$ ，令 $z_n = x^n - y^n i \quad (n = 0,1,2,\cdots\cdots)$ ，

(1)滿足 $z_3 - 2z_2 - z_1 + 2z_0 = 0$ 的 z 共有幾個？

(2)若 $z = 3 - i$ 為 $z_3 - az_2 - bz_1 - 6z_0 = 0$ 之解，求實數 a 及 b 值。

解：(1) $(x^3 - y^3 i) - 2(x^2 - y^2 i) - (x - yi) + 2(1 - i) = 0$

$\therefore (x^3 - 2x^2 - x + 2) - (y^3 - 2y^2 - y + 2)i = 0$

$\therefore x = \pm1, 2$， $y = \pm1, 2 \quad \Rightarrow \quad z$ 共有 $3 \times 3 = 9$ 個

(2) $(27 - i) - a(9 - i) - b(3 - i) - 6(1 - i) = 0$

$$\therefore \begin{cases} 27 - 9a - 3b - 6 = 0 \\ -1 + a + b + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + b = 7 \\ a + b = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = -11 \end{cases}$$

2. 設 a,b,c 是 ΔABC 的三邊長，$s = \dfrac{a+b+c}{2}$ ，r 是 ΔABC 的內切圓半徑。

求證：$\dfrac{1}{(s-a)^2} + \dfrac{1}{(s-b)^2} + \dfrac{1}{(s-c)^2} \geq \dfrac{1}{r^2}$ 。

證：$\because$ 若 $x, y, z \neq 0$，則 $\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{z}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{x}\right)^2 \geq 0$ ，

$$\therefore \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \geq \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = \frac{x+y+z}{xyz}$$

$\therefore$ 令 $x = s - a, y = s - b, z = s - c$ ，

則 $$\frac{1}{(s-a)^2} + \frac{1}{(s-b)^2} + \frac{1}{(s-c)^2} \geq \frac{3s - (a+b+c)}{(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{s^2}{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

又 $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = rs \quad \Rightarrow \quad \dfrac{s^2}{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \dfrac{1}{r^2}$

$$\therefore \quad \frac{1}{(s-a)^2} + \frac{1}{(s-b)^2} + \frac{1}{(s-c)^2} \geq \frac{1}{r^2}$$

另證：$\dfrac{1}{(s-a)^2}+\dfrac{1}{(s-b)^2}+\dfrac{1}{(s-c)^2}\geq\dfrac{1}{r^2}\equiv(\dfrac{r}{s-a})^2+(\dfrac{r}{s-b})^2+(\dfrac{r}{s-c})^2\geq 1\equiv\tan^2\dfrac{A}{2}+\tan^2\dfrac{B}{2}+\tan^2\dfrac{C}{2}\geq 1$

$\because \tan^2\dfrac{A}{2}+\tan^2\dfrac{B}{2}+\tan^2\dfrac{C}{2}\geq\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}+\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}+\tan\dfrac{C}{2}\tan\dfrac{A}{2}=1$

3. 設 n 為正整數，集合 $A=\{1,2,3,4,\cdots,n\}$；設函數 $f:A\to A$ 為一對一且映成函數；

考慮恰有 k 個不動點的函數 f，令這樣的函數 f 共有 $T_n(k)$ 個；

試證：$\sum_{k=0}^{n}k\cdot T_n(k)=n!$ 。　（註：若 $f(k)=k$ 稱 k 為 $f(x)$ 的不動點。）

證：一個有 k 個不動點的函數 f，設其不動點為 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 。

這個函數在 $\sum_{k=0}^{n}k\cdot T_n(k)$ 的加總中會貢獻 k，可看成是 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 各貢獻 1。

則我們只要計算 $1\sim n$ 每個數為不動點的次數再加總即可。

（即是計算 (a,f) 的個數，其中 $f(a)=a$，$a=1\sim n$）

每一個數為不動點的函數有 $(n-1)!$ 個（固定此數其他任意排列）

全部加總 $=(n-1)!\times n=n!=\sum_{k=0}^{n}k\cdot T_n(k)$ 。

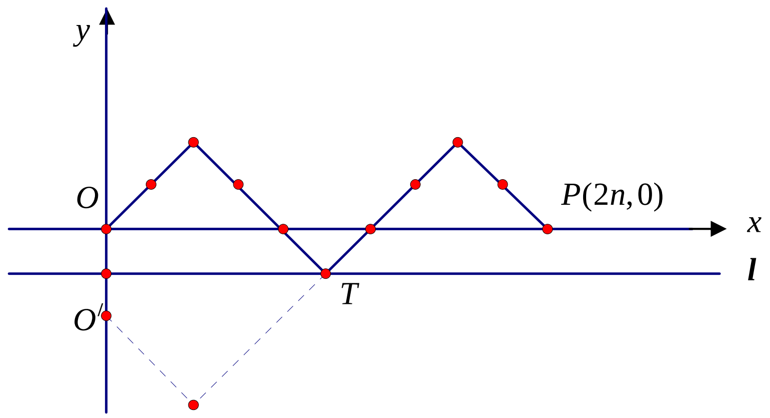
4. 設 $A=|a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{2n}|$ 是由 n 個 1 和 n 個 -1 組成長度為 $2n$ 的排列。

若它滿足：對於任何 $1\leq k\leq 2n$，均有 $\sum_{i=1}^{k}a_i\geq 0$，則稱 A 為一個「有效排列」。

以 $H(n)$ 表示長度為 $2n$ 的有效排列的總數。求 $H(n)=$？

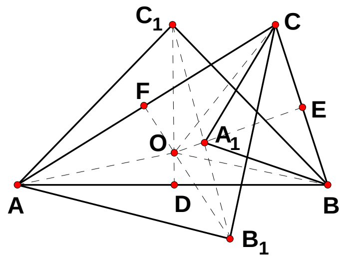
解：每一個由 n 個 1 和 n 個 -1 組成長度為 $2n$ 的排列 A 可以對應一條從原點 O 到 $P(2n,0)$ 的具有 n 個上坡和 n 個下坡的路徑（遇到 1 就上坡，遇到 -1 就下坡）。

$A=|1,1,-1,-1,-1,1,1,1,-1,-1|$ 對應折線如下圖。



每個有效排列對應的路徑是永遠保持在 x 軸上方的路徑，每條穿越 x 軸的路徑必與直線 $L:y=-1$ 相交，按第一個交點 T，將 O 到 T 的一段路徑以 L 為對稱軸翻折下來，在同原路徑中 T 到 P 的一段結合成從 $O'(0,-2)$ 到 $P(2n,0)$ 的一條路徑，它有 $n+1$ 個上坡和 $n-1$ 個下坡，這表明無效路徑的條數為 C_{n+1}^{2n}，從而有效路徑的條數為：$C_n^{2n}-C_{n+1}^{2n}=\dfrac{1}{n+1}C_n^{2n}$ （卡特蘭數）。

5. 如圖，以 ΔABC 的三條邊作為斜邊，分別向形內方向作等腰直角三角形 $\Delta A_1BC, \Delta B_1CA, \Delta C_1AB$，若三點 A_1, B_1, C_1 在一直線上，試求 $\cot A+\cot B+\cot C$ 的值。



解：設 ΔABC 的外心為 O，外接圓半徑為單位長，

作 $\overline{C_1D} \perp \overline{AB}$ 於 D，則外心 O 在 $\overline{AB}$ 的中垂線 $\overline{C_1D}$ 上，

且圓周角 $C=\angle ACB=\angle AOD$，

於是，$\overline{OC_1}=\overline{DC_1}-\overline{DO}=\overline{DA}-\overline{DO}=\sin C-\cos C$, 同理 $\overline{OB_1}=\sin B-\cos B$ ，

而 $\overline{OA_1}=\overline{OE}-\overline{A_1E}=\overline{OE}-\overline{BE}=\cos A-\sin A$，

由於 $\overline{OA_1}\perp\overline{BC}, \overline{OB_1}\perp\overline{AC}, \overline{OC_1}\perp\overline{AB}$，則 $\angle A_1OC_1=B$, $\angle A_1OB_1=C$，$\angle B_1OC_1=\pi-A$，

因此，$S_{\Delta OA_1C_1}=\dfrac{1}{2}\overline{OA_1}\cdot\overline{OC_1}\cdot\sin\angle A_1OC_1=\dfrac{1}{2}(\cos A-\sin A)(\sin C-\cos C)\sin B$

$$S_{\Delta OA_1B_1}=\frac{1}{2}\overline{OA_1}\cdot\overline{OB_1}\cdot\sin\angle A_1OB_1=\frac{1}{2}(\cos A-\sin A)(\sin B-\cos B)\sin C$$

$$S_{\Delta OB_1C_1}=\frac{1}{2}\overline{OB_1}\cdot\overline{OC_1}\cdot\sin\angle B_1OC_1=\frac{1}{2}(\sin B-\cos B)(\sin C-\cos C)\sin A$$

因為點 A_1, B_1, C_1 共線，則 $S_{\Delta OB_1C_1}=S_{\Delta OA_1B_1}+S_{\Delta OA_1C_1}$，即有

$(\sin B-\cos B)(\sin C-\cos C)\sin A=(\cos A-\sin A)(\sin B-\cos B)\sin C+(\cos A-\sin A)(\sin C-\cos C)\sin B$ ……①

同除以 $\sin A\sin B\sin C$，

得 $(1-\cot B)(1-\cot C)=(\cot A-1)(1-\cot B)+(\cot A-1)(1-\cot C)$，

即 $1-\cot B-\cot C+\cot B\cot C=(\cot A+\cot B-1-\cot A\cot B)+(\cot A+\cot C-1-\cot A\cot C)$……②

而在 ΔABC 中， 由於 $\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1$

因此由②得 $\cot A+\cot B+\cot C=2$。