國 立 台 中 一 中 合 作 盃 數 學 金 頭 腦

第四十次有獎徵答

收稿時間：96 年 6 月 4 日 ~ 96 年 6 月 6 日 12：00

說明：(1)解答請寫在答案稿紙上，並務必註明「**交件時間**」、「**班級**」、「**姓名**」。
(2)稿件寫完請投入敬業樓一樓**數學科辦公室外銀色的有獎徵答收稿信箱**內。
(3)答案稿紙可至數學科辦公室索取，**一張答案稿紙只能寫一個題目**的解答，如欲投稿兩題以上，請分別寫在不同的答案稿紙，否則不予評閱。
(4)答案稿紙上須註明投稿時間，投稿前**須請數學科任一位老師在投稿時間上簽證**否則視為當日最晚時間繳交。

1. 設 $z = x - yi \quad (x, y \in R)$ ，令 $z_n = x^n - y^n i \quad (n = 0,1,2,\cdots\cdots)$，

(1)滿足 $z_3 - 2z_2 - z_1 + 2z_0 = 0$ 的 z 共有幾個？

(2)若 $z = 3 - i$ 為 $z_3 - az_2 - bz_1 - 6z_0 = 0$ 之解，求實數 a 及 b 值。

2. 設 a,b,c 是 ΔABC 的三邊長，$s = \dfrac{a+b+c}{2}$ ，r 是 ΔABC 的內切圓半徑。

求證：$\dfrac{1}{(s-a)^2} + \dfrac{1}{(s-b)^2} + \dfrac{1}{(s-c)^2} \geq \dfrac{1}{r^2}$ 。

3. 設 n 為正整數，集合 $A = \{1, 2, 3, 4, \cdots, n\}$；設函數 $f: A \to A$ 為一對一且映成函數；考慮恰有 k 個不動點的函數 f ，令這樣的函數 f 共有 $T_n(k)$ 個；

試證：$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \cdot T_n(k) = n!$ 。 （ 註：若 $f(k) = k$ 稱 k 為 $f(x)$ 的不動點。 ）

4. 設 $A = |a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{2n}|$ 是由 n 個 1 和 n 個－1 組成長度為 $2n$ 的排列。

若它滿足：對於任何 $1 \leq k \leq 2n$，均有 $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} a_i \geq 0$，則稱 A 為一個「有效排列」。

以 $H(n)$ 表示長度為 $2n$ 的有效排列的總數。求 $H(n)$＝？

5. 如圖，以 ΔABC 的三條邊作為斜邊，分別向形內方向作等腰直角三角形 $\Delta A_1BC, \Delta B_1CA, \Delta C_1AB$，若三點 A_1, B_1, C_1 在一直線上，試求 $\cot A + \cot B + \cot C$ 的值。