國 立 台 中 一 中 合 作 盃 數 學 金 頭 腦

第卅九次有獎徵答

收稿時間：96 年 4 月 11 日 ~ 96 年 4 月 13 日 16：00

說明：(1)解答請寫在答案稿紙上，並務必註明「**交件時間**」、「**班級**」、「**姓名**」。
(2)稿件寫完請投入敬業樓一樓**數學科辦公室**外**銀色的有獎徵答收稿信箱**內。
(3)答案稿紙可至數學科辦公室索取，**一張答案稿紙只能寫一個題目**的解答，如欲投稿兩題以上，請分別寫在不同的答案稿紙，否則不予評閱。
(4)答案稿紙上須註明投稿時間，投稿前**須請數學科任一位老師在投稿時間上簽證**否則視為當日最晚時間繳交。

1. $\{a_n\}$數列中，$a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}=\begin{cases}5a_{n+1}-3a_n, & if\ \ a_{n+1}\cdot a_n \text{ 為偶數}\\ a_{n+1}-a_n\ , & if\ \ a_{n+1}\cdot a_n \text{ 為奇數}\end{cases}$，

試證：對一切自然數n，a_n不是 3 的倍數。

證明：$\because$ $a_1=1$，$a_2=2$

$a_3=5\times2-3\times1=7$ a_3不是 3 的倍數

$a_4=5\times7-3\times2=29$ a_4不是 3 的倍數

$a_5=29-7=22$ a_5不是 3 的倍數

設a_m為$\{a_n\}$中，能被 3 整除的所有a_n數列中具有最小下標m，$m>5$

(i) 若$a_m=5a_{m-1}-3a_{m-2}$

$\because 3|a_m$ $\therefore 3|a_{m-1}$ $\therefore a_{m-1}$能被 3 整除(矛盾)（$\because a_m$，m為最小）

(ii) $\therefore a_m=a_{m-1}-a_{m-2}$

$\Rightarrow$ $a_{m-1}\cdot a_{m-2}$為奇數 $\Rightarrow$ a_{m-1},a_{m-2}為奇數

$\Rightarrow$ a_{m-3}為偶數 $\Rightarrow$ $a_{m-2}\cdot a_{m-3}$為偶數 $\Rightarrow$ $a_{m-1}=5a_{m-2}-3a_{m-3}$

$\Rightarrow$ $a_m=a_{m-1}-a_{m-2}=(5a_{m-2}-3a_{m-3})-a_{m-2}=4a_{m-2}-3a_{m-3}$

$\because 3|a_m$ $\therefore 3|a_{m-2}$ $\therefore a_{m-2}$能被 3 整除（矛盾，$\because a_m$，m為最小）

由(i)，(ii)知：a_n不是 3 的倍數，對一切自然數n。

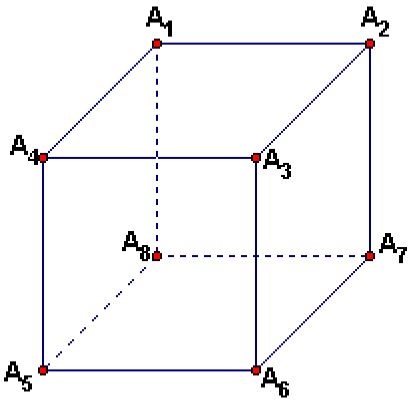
2. 春嬌與志明兩人在一個正立方體的 12 條稜邊上做塗色遊戲，每人每次選取 3 條未塗過的稜邊來塗色，若春嬌與志明分別使用紅色及白色，先把某一面上的 4 條稜邊塗成自己的顏色者為勝。試問先塗的春嬌是否有必勝策略？若有，請敘述必勝策略； 反之，若沒有必勝策略，也請敘述原因。

解 1：無必勝策略

把正方體的 12 條邊分成 8 組「三歪邊」，每一組由 3 條兩兩異面的邊組成(兩兩互為歪斜)，而每一條邊都屬於這 8 組中的兩組「三歪邊」之一邊。在這遊戲中，先進行塗色的先手沒有必勝策略，是因為後手可以採用如下策略來破局：先手第一步任選三條邊都塗紅色，而這 3 條邊至多出現在$3\times2=6$組「三歪邊」，因此，至少還有 2 組「三歪邊」的邊都尚未塗色，此時後手從這兩組「三歪邊」中任選一組，並將此組中的「三歪邊」塗白色。此時先手在以後如何塗色，都無法將某一面上的 4 條邊全塗成相同顏色。

解 2：(1.24 王建詒 提供)

無必勝策略



將這十二邊分成四組，$S_1=\{\overline{A_1A_4},\overline{A_3A_6},\overline{A_7A_8}\}$，

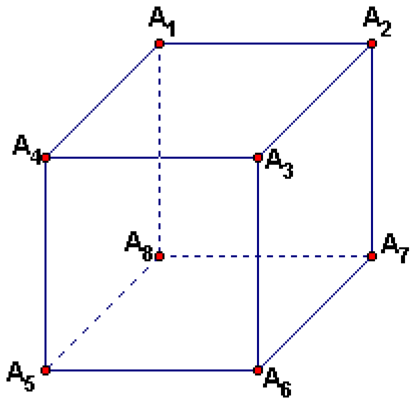
$S_2=\{\overline{A_3A_4},\overline{A_5A_8},\overline{A_2A_7}\}$，$S_3=\{\overline{A_2A_3},\overline{A_1A_8},\overline{A_5A_6}\}$，

$S_4=\{\overline{A_1A_2},\overline{A_6A_7},\overline{A_4A_5}\}$

春嬌先塗完三條後，必有一組都沒被塗色，志明可將這一組的三條皆塗色，則每一面上的四條邊皆會有一條邊為白色，故春嬌不可能將某一面都塗成紅色，即志明必能阻止春嬌獲勝

解 3：(1.22 謝瑋 提供)

無必勝策略



(1)畫過的邊不能重畫

(2)一個面有四個邊，只要其中有一條自己顏色，則對方就無法獲勝

(3)二個相鄰的面用一邊，故使「每個面的四邊至少有一邊是自己的」，只需畫三條邊(這三條邊異面，不相鄰且不平行)

(4)先手的人若要保證自己不會失敗，必須想辦法讓後手的人達不到說明(3)的狀況。

而說明(3)中的情況，在正方體中有 8 種可能(不考慮排列順序)

這 8 種分別為$S_1=\{\overline{A_1A_4},\overline{A_3A_6},\overline{A_7A_8}\}$，$S_2=\{\overline{A_1A_4},\overline{A_5A_6},\overline{A_2A_7}\}$，

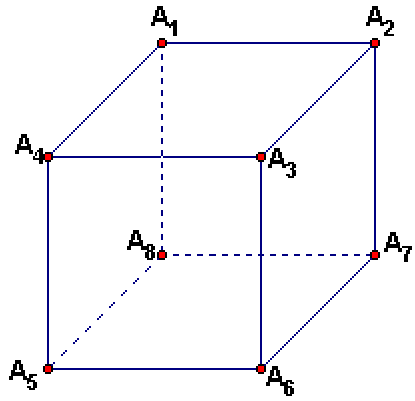
$S_3=\{\overline{A_1A_2},\overline{A_6A_7},\overline{A_4A_5}\}$，$S_4=\{\overline{A_1A_2},\overline{A_3A_6},\overline{A_5A_8}\}$，$S_5=\{\overline{A_1A_8},\overline{A_3A_4},\overline{A_6A_7}\}$，$S_6=\{\overline{A_1A_8},\overline{A_5A_6},\overline{A_2A_3}\}$，

$S_7=\{\overline{A_3A_4},\overline{A_2A_7},\overline{A_5A_8}\}$，$S_8=\{\overline{A_4A_5},\overline{A_2A_3},\overline{A_7A_8}\}$

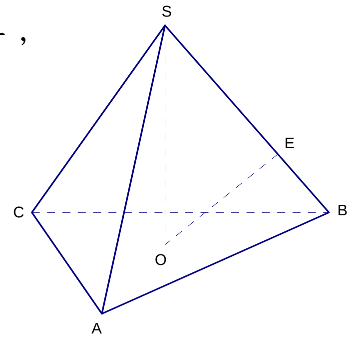
可發現各邊各出現 2 次，故若要達成說明(4)的情形，一定要畫$\frac{8}{2}=4$條邊

但一次只能畫三條邊小於四條邊

所以，不論先手如何畫，後手必可找到一組異面的三個邊，故先手沒有必勝策略。



3. 已知三角錐$S-ABC$中，底ABC為正三角形，S在ΔABC中心的正上方，且相鄰的兩側面的二面角為2α，底面中心到側稜的距離$\overline{OE}=1$，如圖所示。求$S-ABC$之體積。



解：作$\overline{EG}\perp\overline{SB}$，$\overline{EG}$交$\overline{AB}$於$G$，作$\overline{EF}\perp\overline{SB}$，$\overline{EF}$交$\overline{BC}$於$F$，則$\angle FEG=2\alpha$

由正三角錐的對稱性，$\Delta EBG\cong\Delta EBF$

$\therefore\overline{EG}=\overline{EF}$，$\overline{BG}=\overline{BF}$，$\overline{FG}//\overline{AC}$

$\because$過一點而垂直於一直線的所有直線都在同一平面上

$\therefore\overline{EF},\overline{OE},\overline{EG}$在同一平面上，又$F,O,G$都在平面$ABC$上

$\therefore F,O,G$在一直線上，$\overline{FO}=\overline{OG}$，$\overline{AC}=\frac{3}{2}\overline{FG}$

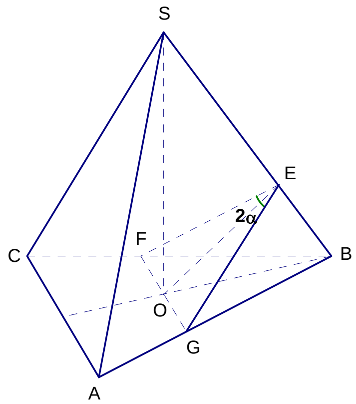
在等腰ΔFEG中，$\overline{FG}=2\overline{OE}\tan\alpha$，故$\overline{AC}=3\tan\alpha$

在正ΔABC中，$\overline{OB}=\frac{\sqrt{3}}{3}\overline{AC}=\sqrt{3}\tan\alpha$

在直角ΔOEB中，$\overline{EB}=\sqrt{\overline{OB}^2-\overline{OE}^2}=\sqrt{3\tan^2\alpha-1}$

$\because\Delta OEB\sim\Delta SOB$，$\therefore\overline{SO}=\frac{\overline{OE}\cdot\overline{OB}}{\overline{EB}}=\frac{\sqrt{3}\tan\alpha}{\sqrt{3\tan^2\alpha-1}}$

故$V_{S-ABC}=\frac{1}{3}\cdot S_{\Delta ABC}\cdot\overline{OS}=\frac{9\tan^3\alpha}{4\sqrt{3\tan^2\alpha-1}}$



4. 試求下列方程組的實數解：$\begin{cases}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)=1+y^7\\(1+y)(1+y^2)(1+y^4)=1+x^7\end{cases}$。

解 1：(A) $(x,y)=(0,0)$ 顯然為一解。

(B) 若 $x\neq 1$ 則 $1+y^7=(1+x)(1+x^2)(1+x^4)=\dfrac{(1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)}{1-x}=\dfrac{1-x^8}{1-x}$

(1) 若 $x=y \Rightarrow 1+x^7=\dfrac{1-x^8}{1-x} \Rightarrow x(x^6-1)=0 \Rightarrow x=0,-1$ $\therefore(-1,-1)$ 為一解。

(2) 若 $x\neq y$

$(a)\, x>0, y<0$　則 $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)>1,\ 1+y^7<1 \Rightarrow$ 不可能有解

$(b)\, x<0, y>0$　同(a)　不可能有解

$(c)\, x>y>0$　則 $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)>1+x^7>1+y^7 \Rightarrow$ 不可能有解

$(d)\, y>x>0$　同(c)　不可能有解

$(e)\, 0>x>y$　$\begin{cases}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)=1+y^7 \cdots ①\\(1+y)(1+y^2)(1+y^4)=1+x^7 \cdots ②\end{cases}$

$① \times (1-x) \Rightarrow 1-x^8=(1-x)(1+y^7) \cdots ③$

$② \times (1-y) \Rightarrow 1-y^8=(1-y)(1+x^7) \cdots ④$

$③-④ \Rightarrow y^8-x^8=(y-x)+(y^7-x^7)+xy(x^6-y^6) \cdots ⑤$

但 $0>x>y \Rightarrow x^6<y^6$，$x^7>y^7$，$x^8<y^8$

則 $y^8-x^8>0$，$(y-x)+(y^7-x^7)+xy(x^6-y^6)<0 \Rightarrow$ ⑤式不可能有解

$(f)\, 0>y>x$　同(e)　不可能有解

綜合$(a)\sim(f)$，當 $x\neq y$，方程組不可能有解

故方程組的解為 $(x,y)=(0,0)$，$(-1,-1)$

解 2：(1.22 廖奕安 提供)

經過觀察，互為反函數，故兩圖形的交點在 $y=x$，

用 $y=x$ 代入 $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)=1+y^7$

$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)=1+x^7$

$\Rightarrow (1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)=(1+x^7)(1-x)$

$\Rightarrow 1-x^8=1+x^7-x-x^8$

$\Rightarrow x^7-x=0$

$\Rightarrow x(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)=0$

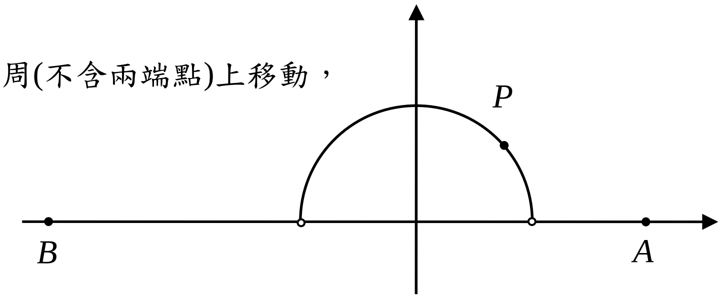
$\Rightarrow x=0,-1,1$(不合)

故 $(x,y)=(0,0),(-1,-1)$

5. 令 $A(z_1)$、$B(z_2)$ 表複數平面上兩點，其中 $z_1=2$、$z_2=-3$。

若 $P(z)$ 點在以原點為圓心，1 為半徑的上半圓周(不含兩端點)上移動，

求複數 $\dfrac{z-z_1}{z-z_2}$ 的主幅角最小值。



解 1：設 $\omega=\dfrac{z-z_1}{z-z_2}=\dfrac{z-2}{z+3}$，則 $z=\dfrac{3\omega+2}{1-\omega}$。

由題意知 $|z|=1$，故 $\dfrac{|3\omega+2|}{|1-\omega|}=1$，即 $\dfrac{\left|\omega-(-\frac{2}{3})\right|}{|\omega-1|}=\dfrac{1}{3}$。

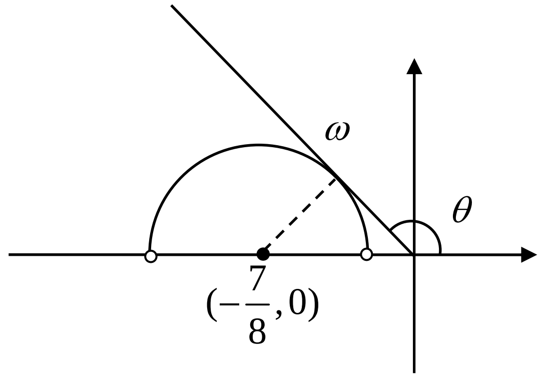
複數 ω 所對應的圖形為阿波羅圓

$\left|\omega-(-\dfrac{7}{8})\right|=\dfrac{5}{8}$ (即 $(x-\dfrac{7}{8})^2+y^2=(\dfrac{5}{8})^2$)

的上半圓弧。

如右圖所示，θ 即為 ω 的最小主幅角

其中 $\sin(\pi-\theta)=\dfrac{\cancel{5}{8}}{\cancel{7}{8}}=\dfrac{5}{7}$，即 $\theta=\pi-\sin^{-1}(\dfrac{5}{7})$



解 2：設 $\varphi=\arg\left(\dfrac{z-z_1}{z-z_2}\right)$

設 $z=x+yi \quad (x,y\in R)$ 則 $x^2+y^2=1 \quad (y>0)$ ⋯ ①

記 $\arg(z-z_1)=\alpha,\arg(z-z_2)=\beta$ 則 $\varphi=\alpha-\beta$，且 $\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\pi$ ⋯ ②

$\because \tan\alpha=\dfrac{y}{x-2},\tan\beta=\dfrac{y}{x+3} \quad \therefore \tan\varphi=\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}=\dfrac{5y}{x-5}$

由①，可設 $x=\cos\theta,y=\sin\theta,\theta\in(0,\pi)$ 則 $\tan\varphi=\dfrac{5y}{x-5}=\dfrac{5\sin\theta}{\cos\theta-5}$

即 $5\sin\theta-\tan\varphi\cdot\cos\theta=-5\tan\varphi$ ⋯ ③

③在 $\theta\in(0,\pi)$ 內有實數解的充要條件是 $|5\sin\theta-\tan\varphi\cdot\cos\theta|=|-5\tan\varphi|\le\sqrt{5^2+(-\tan\varphi)^2}$

解得 $-\dfrac{5\sqrt{6}}{12}\le\tan\varphi\le\dfrac{5\sqrt{6}}{12}$ ⋯ ④

由②，④可得 $\varphi_{\min}=\pi-\tan^{-1}\dfrac{5\sqrt{6}}{12}$