

國立台中一中合作盃數學金頭腦

第卅九次有獎徵答

收稿時間：96年4月11日 ~ 96年4月13日 16:00

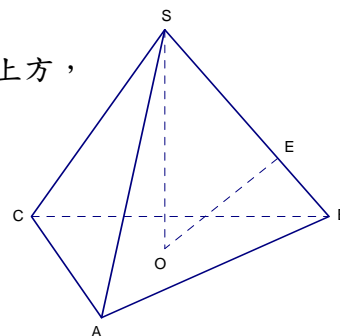
- 說明：(1)解答請寫在答案稿紙上，並務必註明「**交件時間**」、「**班級**」、「**姓名**」。
- (2)稿件寫完請投入敬業樓一樓**數學科辦公室**外銀色的有獎徵答收稿信箱內。
- (3)答案稿紙可至數學科辦公室索取，一張答案稿紙只能寫一個題目的解答，如欲投稿兩題以上，請分別寫在不同的答案稿紙，否則不予評閱。
- (4)答案稿紙上須註明投稿時間，投稿前須請**數學科任一位老師**在投稿時間上簽證，否則視為當日最晚時間繳交。

1. $\{a_n\}$ 數列中， $a_1=1$ ， $a_2=2$ ， $a_{n+2} = \begin{cases} 5a_{n+1}-3a_n, & \text{if } a_{n+1} \cdot a_n \text{ 為偶數,} \\ a_{n+1}-a_n, & \text{if } a_{n+1} \cdot a_n \text{ 為奇數} \end{cases}$

試證：對一切自然數 n ， a_n 不是 3 的倍數。

2. 春嬌與志明兩人在一個正立方體的 12 條稜邊上做塗色遊戲，每人每次選取 3 條未塗過的稜邊來塗色，若春嬌與志明分別使用紅色及白色，先把某一面上的 4 條稜邊塗成自己的顏色者為勝。試問先塗的春嬌是否有必勝策略？若有，請敘述必勝策略；反之，若沒有必勝策略，也請敘述原因。

3. 已知三角錐 $S-ABC$ 中，底 ABC 為正三角形， S 在 $\triangle ABC$ 中心的正上方，且相鄰的兩側面的二面角為 2α ，底面中心到側稜的距離 $\overline{OE}=1$ ，如圖所示。求 $S-ABC$ 之體積。



4. 試求下列方程組的實數解：
$$\begin{cases} (1+x)(1+x^2)(1+x^4)=1+y^7 \\ (1+y)(1+y^2)(1+y^4)=1+x^7 \end{cases}$$

5. 令 $A(z_1)$ 、 $B(z_2)$ 表複數平面上兩點，其中 $z_1=2$ 、 $z_2=-3$ 。

若 $P(z)$ 點在以原點為圓心，1 為半徑的上半圓周(不含兩端點)上移動，

求複數 $\frac{z-z_1}{z-z_2}$ 的主幅角最小值。

