國立台中一中合作盃數學金頭腦

第卅八次有獎徵答

收稿時間：95 年 12 月 13 日 ~ 95 年 12 月 15 日 16：00

說明：(1)解答請寫在答案稿紙上，並務必註明「**交件時間**」、「**班級**」、「**姓名**」。
(2)稿件寫完請投入敬業樓一樓**數學科辦公室**外**銀色的有獎徵答收稿信箱**內。
(3)答案稿紙可至數學科辦公室索取，**一張答案稿紙只能寫一個題目**的解答，如欲投稿兩題以上，請分別寫在不同的答案稿紙，否則不予評閱。
(4)答案稿紙上須註明投稿時間，投稿前**須請數學科任一位老師在投稿時間上簽證**否則視為當日最晚時間繳交。

1. 設 z 是 1 的 7 次方根，$z\neq 1$，求 $z+z^2+z^4$ 的值。

解：$\because z^7-1=(z-1)(z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1)$

又 $z\neq 1$

$\therefore z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z=-1$

令 $A=z+z^2+z^4, B=z^3+z^5+z^6$

$\Rightarrow A+B=-1, AB=(z+z^2+z^4)(z^3+z^5+z^6)=z^4+z^6+1+z^5+1+z+1+z^2+z^3=2$

故 A 與 B 是方程式 $x^2+x+2=0$ 的根

從而 $A=\dfrac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$

$\therefore z+z^2+z^4=\dfrac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$ 。

2. 設 $a,b,\alpha,\beta\in R$；

試證：$\sqrt{(\alpha-a)^2+(\beta-b)^2}+\sqrt{(\alpha-a)^2+\beta^2}+\sqrt{\alpha^2+(\beta-b)^2}+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\geq 2\sqrt{a^2+b^2}$ 。

證明：設 $z_1=-(\alpha-a)-(\beta-b)i, z_2=-(\alpha-a)+\beta i, z_3=\alpha-(\beta-b)i, z_4=\alpha+\beta i,$

則 $|z_1|=\sqrt{(\alpha-a)^2+(\beta-b)^2}, |z_2|=\sqrt{(\alpha-a)^2+\beta^2}, |z_3|=\sqrt{\alpha^2+(\beta-b)^2}, |z_4|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$

且 $|z_1+z_2+z_3+z_4|=2|a+bi|=2\sqrt{a^2+b^2}$

$\because |z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|\geq|z_1+z_2+z_3+z_4|$

$\therefore \sqrt{(\alpha-a)^2+(\beta-b)^2}+\sqrt{(\alpha-a)^2+\beta^2}+\sqrt{\alpha^2+(\beta-b)^2}+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\geq 2\sqrt{a^2+b^2}$ 。

3. 設 P 為 ΔABC 平面上任一點，$a=\overline{BC}, b=\overline{CA}, c=\overline{AB}$；

試證：$a\overline{PB}\cdot\overline{PC}+b\overline{PC}\cdot\overline{PA}+c\overline{PA}\cdot\overline{PB}\ge abc$ 。

證明：將 P, A, B, C 對應到高斯平面上之 z, z_1, z_2, z_3，

令 $f(z)=\dfrac{(z-z_2)(z-z_3)}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)}+\dfrac{(z-z_3)(z-z_1)}{(z_2-z_3)(z_2-z_1)}+\dfrac{(z-z_1)(z-z_2)}{(z_3-z_1)(z_3-z_2)}$

（即 z_1, z_2, z_3 之 $Lagrange$ 多項式）

$f(z_1)=f(z_2)=f(z_3)=1$

$\Rightarrow f(z)=1$ 而 $|U|+|V|+|W|\ge|U+V+W|$

$$\Rightarrow \frac{|z-z_2||z-z_3|}{|z_1-z_2||z_1-z_3|}+\frac{|z-z_3||z-z_1|}{|z_2-z_3||z_2-z_1|}+\frac{|z-z_1||z-z_2|}{|z_3-z_1||z_3-z_2|}\ge 1$$

$\Rightarrow a\overline{PB}\cdot\overline{PC}+b\overline{PC}\cdot\overline{PA}+c\overline{PA}\cdot\overline{PB}\ge abc$ 。

4. 空間中有 10 個相異點，且其中任三點不共線，任兩點連成之線段均用黑色或紅色顏料塗上顏色，已知其中有一點連出的線段都塗上黑色，則以這 10 個點為頂點的三角形中，三邊同色的三角形至少有多少個？

解：三角形共 $C_3^{10}=120$ 個，設同色三角形有 x 個，則異色三角形有 $(120-x)$ 個；

每個同色三角形有 3 個同色角，每個異色三角形有 1 個同色角。

設同色角總個數為 y 個，則 $y=120+2x$

連出線段均塗黑色的點為頂點的同色角有 $C_2^9=36$ 個

其他點為頂點的同色角至少有 $C_2^4+C_2^5=16$ 個

（ $C_2^4+C_2^5<C_2^3+C_2^6<C_2^2+C_2^7<C_2^8<C_2^9$ ）

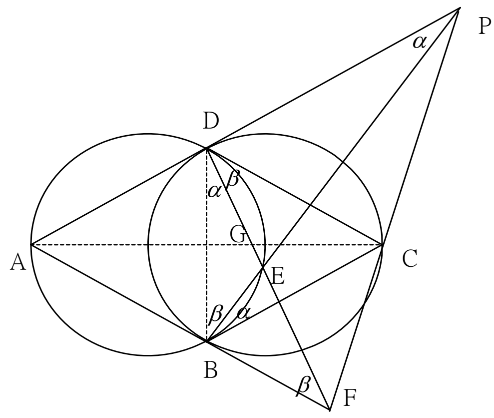
故同色角總個數至少為 $36+16\times 9=180$ 個。舉例說明確可達 180 個。

$\Rightarrow y=120+2x\ge 180$

$\Rightarrow x\ge 30$

故三邊同色的三角形至少有 30 個。

5. 在菱形 ABCD 中，$\angle A=60^0$，E 為 ΔABD 的外接圓的劣弧 $\overset{\frown}{BD}$ 上的任意一點，直線 $\overline{DE}$ 與 $\overline{AB}$ 交於點 F，求證：$\overline{AD}$，$\overline{BE}$，$\overline{CF}$ 三線共點。



證明：連 $\overline{AC}$，設 $\overline{AC}$ 交 $\overline{DE}$ 於 G，設 $\angle BDF=\alpha, \angle FDC=\beta$

則 $\alpha+\beta=60^0$ 且 $\angle DBE=\angle AFG=\beta, \angle EBC=\angle P=\alpha$

令 $\overline{AD}=a$

由正弦定理

$$\overline{AP}=\frac{a\sin(60^0+\beta)}{\sin\alpha}, \overline{DF}=\frac{a\sin 60^0}{\sin\beta}$$

$$\overline{DP}=\overline{AP}-\overline{AD}=\frac{a(\sin(60^0+\beta)-\sin\alpha)}{\sin\alpha}$$

$$=\frac{a(\sin(60^0+\beta)-\sin(60^0-\beta))}{\sin\alpha}$$

$$=\frac{2a\cos 60^0\sin\beta}{\sin\alpha}$$

$$=\frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}$$

$$\overline{GC}=\frac{a\sin\beta}{\sin(90^0+\alpha)}$$

$$\overline{AG}=\frac{a\sin(60^0+\alpha)}{\sin(90^0-\alpha)}$$

$$\overline{GF}=\frac{\overline{AG}\sin 30^0}{\sin\beta}=\frac{a\sin(60^0+\alpha)}{2\sin(90^0-\alpha)\sin\beta}$$

又 $\overline{AC}=\sqrt{3}a$

ΔDAG 中，$\dfrac{\overline{DP}}{\overline{AP}}\cdot\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CG}}\cdot\dfrac{\overline{GF}}{\overline{FD}}=\dfrac{\sin\beta\cdot\sin\alpha\cdot\sqrt{3}\cdot\sin(90^0+\alpha)\cdot\sin(60^0+\alpha)\cdot\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\sin(60^0+\beta)\cdot\sin\beta\cdot 2\sin(90^0-\alpha)\cdot\sin\beta\cdot\sin 60^0}=1$

由孟氏定理的逆定理知 F, C, P 三點共線，即 $\overline{AD}$，$\overline{BE}$，$\overline{CF}$ 三線共點