國立台中一中合作盃數學金頭腦

第卅七次有獎徵答

收稿時間：95 年 10 月 25 日 ~ 95 年 10 月 27 日 16：00

說明：(1)解答請寫在答案稿紙上，並務必註明「**交件時間**」、「**班級**」、「**姓名**」。
(2)稿件寫完請投入敬業樓一樓**數學科辦公室**外**銀色的有獎徵答收稿信箱**內。
(3)答案稿紙可至數學科辦公室索取，**一張答案稿紙只能寫一個題目**的解答，如欲投稿兩題以上，請分別寫在不同的答案稿紙，否則不予評閱。
(4)答案稿紙上須註明投稿時間，投稿前**須請數學科任一位老師在投稿時間上簽證**否則視為當日最晚時間繳交。

1. 設 a,b,c 為非負實數，且滿足 $a+b+c=3$；

試證：$\dfrac{a}{b^2+1}+\dfrac{b}{c^2+1}+\dfrac{c}{a^2+1}\ge\dfrac{3}{2}$，並問等號何時成立。

證明：$(1-b)^2\ge 0\Rightarrow 1+b^2\ge 2b\Rightarrow \dfrac{1}{1+b^2}\le\dfrac{1}{2b}$

$$\frac{a}{1+b^2}=a-\frac{ab^2}{1+b^2}\ge a-\frac{ab^2}{2b}=a-\frac{ab}{2}$$

同理 $\dfrac{b}{1+b^2}\ge b-\dfrac{bc}{2}$，$\dfrac{c}{1+a^2}\ge c-\dfrac{ac}{2}$

$$\Rightarrow\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\ge a+b+c-\frac{1}{2}(ab+bc+ca)=3-\frac{1}{2}(ab+bc+ca)\ge 3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

$$\left(\begin{array}{l}\because (a^2+b^2+c^2)(1^2+1^2+1^2)\ge(a+b+c)^2\\ \therefore a^2+b^2+c^2\ge 3(\text{等號成立時}, a=b=c)\\ \because (a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\\ \therefore ab+bc+ca=\dfrac{1}{2}(9-(a^2+b^2+c^2))\le\dfrac{1}{2}\times 6=3\end{array}\right)$$

故等號成立時，a=b=c=1

2. 若 a 為無理數，n 為大於 1 的自然數，試證：$\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)^{\frac{1}{n}}+\left(a-\sqrt{a^2-1}\right)^{\frac{1}{n}}$ 是無理數。

證明：令 $N=\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)^{\frac{1}{n}}+\left(a-\sqrt{a^2-1}\right)^{\frac{1}{n}}$ ，$b=\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)^{\frac{1}{n}}$ ，則 $N=b+\frac{1}{b}$

設 N 是有理數，

由等式 $b^{m+1}+\frac{1}{b^{m+1}}=\left(b+\frac{1}{b}\right)\left(b^m+\frac{1}{b^m}\right)-\left(b^{m-1}+\frac{1}{b^{m-1}}\right)$

$m=1, b^2+\frac{1}{b^2}=N\cdot N-2$ 是有理數

$m=2, b^3+\frac{1}{b^3}=N\cdot\left(b^2+\frac{1}{b^2}\right)-N$ 是有理數

$m=3, b^4+\frac{1}{b^4}=N\cdot\left(b^3+\frac{1}{b^3}\right)-\left(b^2+\frac{1}{b^2}\right)$ 是有理數

…

$b^m+\frac{1}{b^m}$ 是有理數 $\forall m\in N$ ，故 $b^n+\frac{1}{b^n}$ 是有理數

即 $b^n+\frac{1}{b^n}=a+\sqrt{a^2-1}+a-\sqrt{a^2-1}=2a$ 是有理數， 矛盾

故 $\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)^{\frac{1}{n}}+\left(a-\sqrt{a^2-1}\right)^{\frac{1}{n}}$ 是無理數。

3. 設 a,b,c 為三角形的邊長，α,β,γ 為其對應角；

試證：若 $a+b=\tan\dfrac{\gamma}{2}(a\tan\alpha+b\tan\beta)$，則此三角形為等腰三角形。

證明：(1) $\because \gamma=\pi-\alpha-\beta \quad \therefore \tan\dfrac{\gamma}{2}=\cot\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

則 $a+b=\tan\dfrac{\gamma}{2}(a\tan\alpha+b\tan\beta)=\cot\dfrac{\alpha+\beta}{2}(a\tan\alpha+b\tan\beta)$

$\Rightarrow (a+b)\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}=a\tan\alpha+b\tan\beta$

(2) 不失一般性假設 $\alpha\le\beta\Rightarrow a\le b$

若 $\beta>\dfrac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \tan\alpha<\tan(\pi-\beta)=-\tan\beta$

$\Rightarrow (a+b)\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}=a\tan\alpha+b\tan\beta<a(-\tan\beta)+b\tan\beta=(b-a)\tan\beta<0$，矛盾

$\therefore \alpha\le\beta<\dfrac{\pi}{2}$

由 $y=\tan x$ 的圖形凸向上，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$，知 $\dfrac{1}{2}(\tan\alpha+\tan\beta)>\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2},\alpha\ne\beta$

若 $\alpha<\beta \quad \Rightarrow \dfrac{a+b}{2}(\tan\alpha+\tan\beta)>(a+b)\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}=a\tan\alpha+b\tan\beta$

$\Rightarrow \dfrac{b-a}{2}\tan\alpha>\dfrac{b-a}{2}\tan\beta$

$\Rightarrow \alpha>\beta$ 矛盾

$\therefore \alpha=\beta$

故三角形為等腰三角形。

4. 試證：$a^2+b^2=c^2+3$有無限多個正整數解a,b,c。

證明：令a為偶整數，且$c=\dfrac{a^2-2}{2}=\dfrac{a^2}{2}-1$為奇數，$b=\dfrac{a^2-4}{2}=\dfrac{a^2}{2}-2$為偶數

則$c^2-b^2=(c-b)(c+b)=a^2-3$　　得證。

5. 求方程式$5(xy+yz+zx)=4xyz$的正整數解。

解：原式$\Rightarrow \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{4}{5}$

令$x\le y\le z \Rightarrow \dfrac{1}{x}\ge\dfrac{1}{y}\ge\dfrac{1}{z}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{x}\ge\dfrac{\frac{4}{5}}{3}=\dfrac{4}{15}\Rightarrow x\le\dfrac{15}{4}$，取$x=1,2,3$

(1) $x=1\Rightarrow \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{-1}{5}$　　矛盾

(2) $x=2\Rightarrow \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{3}{10}\Rightarrow \dfrac{1}{y}\ge\dfrac{\frac{3}{10}}{2}=\dfrac{3}{20}\Rightarrow y\le\dfrac{20}{3}$，取$y=2,3,4,5,6$

$\Rightarrow y=2\Rightarrow \dfrac{1}{z}=\dfrac{3}{10}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{-2}{10}$　　矛盾

$\Rightarrow y=3\Rightarrow \dfrac{1}{z}=\dfrac{3}{10}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{-1}{30}$　　矛盾

$\Rightarrow y=4\Rightarrow \dfrac{1}{z}=\dfrac{3}{10}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{20}$　$\Rightarrow z=20$

$\Rightarrow y=5\Rightarrow \dfrac{1}{z}=\dfrac{3}{10}-\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{10}$　$\Rightarrow z=10$

$\Rightarrow y=6\Rightarrow \dfrac{1}{z}=\dfrac{3}{10}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{4}{30}$　$\Rightarrow z=7.5$　矛盾

(3) $x=3\Rightarrow \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{7}{15}\Rightarrow \dfrac{1}{y}\ge\dfrac{\frac{7}{15}}{2}=\dfrac{7}{30}\Rightarrow y\le\dfrac{30}{7}$，取$y=3,4$

$\Rightarrow y=3\Rightarrow \dfrac{1}{z}=\dfrac{7}{15}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{15}$　$\Rightarrow z=7.5$　矛盾

$\Rightarrow y=4\Rightarrow \dfrac{1}{z}=\dfrac{7}{15}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{13}{60}$　$\Rightarrow z=\dfrac{60}{13}$　矛盾

由(1)，(2)，(3)，方程式的解為(2, 4, 20) (2, 5, 10)任排共 12 組