

國立台中一中合作盃數學金頭腦

第卅七次有獎徵答

收稿時間：95 年 10 月 25 日 ~ 95 年 10 月 27 日 16:00

- 說明：(1)解答請寫在答案稿紙上，並務必註明「**交件時間**」、「**班級**」、「**姓名**」。
- (2)稿件寫完請投入敬業樓一樓**數學科辦公室**外銀色的**有獎徵答收稿信箱**內。
- (3)答案稿紙可至數學科辦公室索取，**一張答案稿紙只能寫一個題目**的解答，如欲投稿兩題以上，請分別寫在不同的答案稿紙，否則不予評閱。
- (4)答案稿紙上須註明投稿時間，投稿前須請**數學科任一位老師**在投稿時間上簽證，否則視為當日最晚時間繳交。

1. 設 a, b, c 為非負實數，且滿足 $a + b + c = 3$ ；

試證： $\frac{a}{b^2 + 1} + \frac{b}{c^2 + 1} + \frac{c}{a^2 + 1} \geq \frac{3}{2}$ ，並問等號何時成立。

2. 若 a 為無理數， n 為大於 1 的自然數，試證： $(a + \sqrt{a^2 - 1})^{\frac{1}{n}} + (a - \sqrt{a^2 - 1})^{\frac{1}{n}}$ 是無理數。

3. 設 a, b, c 為三角形的邊長， α, β, γ 為其對應角；

試證：若 $a + b = \tan \frac{\gamma}{2} (a \tan \alpha + b \tan \beta)$ ，則此三角形為等腰三角形。

4. 試證： $a^2 + b^2 = c^2 + 3$ 有無限多個正整數解 a, b, c 。

5. 求方程式 $5(xy + yz + zx) = 4xyz$ 的正整數解。