

國立台中一中合作盃數學金頭腦

第卅六次有獎徵答

收稿時間：95年5月24日 ~ 95年5月26日 16:00

說明：(1)解答請寫在答案稿紙上，並務必註明「交件時間」、「班級」、「姓名」。
(2)稿件寫完請投入敬業樓一樓數學科辦公室外銀色的有獎徵答收稿信箱內。
(3)答案稿紙可至數學科辦公室索取，一張答案稿紙只能寫一個题目的解答，如欲投稿兩題以上，請分別寫在不同的答案稿紙，否則不予評閱。
(4)答案稿紙上須註明投稿時間，投稿前須請數學科任一位老師在投稿時間上簽證，否則視為當日最晚時間繳交。

1. 設 x, y 均為整數，則點 (x, y) 稱為格子點。找出最小的 n ，使得任意含 n 個格子點的集合中，有三個點所圍成的三角形面積為正整數。

2. $ABCD$ 為四面體， $\overline{AB} = a$ 、 $\overline{CD} = b$ ，直線 \overleftrightarrow{AB} 與直線 \overleftrightarrow{CD} 之距離 d ，四面體內切球半徑為 r 。

證明： $r < \frac{ab}{2(a+b)}$

3. 已知數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_1 = 1$ ， $a_n = \frac{2S_n^2}{2S_n - 1}$ ($n \geq 2$)，其中 $S_n = \sum_{i=1}^n a_i$ ，求 S_n 。

4. 設經定點 $A(0, a)$ 的任意直線 L 與拋物線 $y = x^2$ 有相異交點 P 及 Q ，且使 $\frac{1}{AP} + \frac{1}{AQ}$ 的值為定值 k ，求此定值 k 及 a 。

5. 設 $\log \tan \theta_1 + \log \tan \theta_2 + \log \tan \theta_3 + \cdots + \log \tan \theta_{10} = 0$

求 $\log \sin \theta_1 + \log \sin \theta_2 + \log \sin \theta_3 + \cdots + \log \sin \theta_{10}$ 之最大值。

