

國立台中一中合作盃數學金頭腦

第卅三次有獎徵答

收稿時間：94年10月18日 ~ 94年10月20日 16:00

- 說明：(1)解答請寫在答案稿紙上，並務必註明「**交件時間**」、「**班級**」、「**姓名**」。
- (2)稿件寫完請投入敬業樓一樓**數學科辦公室**外銀色的有獎徵答收稿信箱內。
- (3)答案稿紙可至數學科辦公室索取，**一張答案稿紙只能寫一個題目**的解答，如欲投稿兩題以上，請分別寫在不同的答案稿紙，否則不予評閱。
- (4)答案稿紙上須註明投稿時間，投稿前須請**數學科任一位老師**在投稿時間上簽證，否則視為當日最晚時間繳交。

1. 設 $k, n \in \mathbb{N}$ ，在 $\forall k$ 滿足 $k \leq \sqrt{n}$ 且 $k | n$ 條件下，求出所有 n 值。(請詳列過程)
2. 設 $z, w \in \mathbb{C}$ ， $n \in \mathbb{N}$ ，若 $w^n z + w^{n-1} z^2 + w^{n-2} z^3 + \dots + w z^n = 1$ ，其中 $|w| \leq 1$ ，試證： $|z| > \frac{1}{2}$ 。
3. 以 $\triangle ABC$ 的邊 \overline{BC} 為直徑作半圓與 \overline{AB} 、 \overline{AC} 分別交於 D 、 E ，過 D 、 E 作 \overline{BC} 之垂線其垂足分別為 F 、 G ，又線段 \overline{DG} 與 \overline{EF} 交於點 M ，求證： $\overline{AM} \perp \overline{BC}$ 。
4. 數列 $\{a_n\}$ ： a_1, a_2, a_3, \dots 其中 a_1 為自然數，且 $a_{n+1} = [1.5a_n] + 1$ (其中 $[x]$ 表示不大於實數 x 的最大整數)，問：是否可以找到 a_1 的值，使數列 $\{a_n\}$ 的前 2005 項均為偶數，而第 2006 項為奇數？證明您的答案。
5. 如圖，給定橢圓的雙焦點 F_1 、 F_2 ，與橢圓上一點 A ，以及橢圓內部一點 P ，若存在橢圓一弦 \overline{QR} ，使滿足 P 為 \overline{QR} 中點，試以尺規作圖求出 Q 、 R 二點。

