合作盃數學金頭腦第卅一次有獎徵答解答

1. 證明：$y=\dfrac{px}{x-p}\Rightarrow(x-p)(y-p)=p^2\Rightarrow\begin{cases}x-p=1\\y-p=p^2\end{cases},\begin{cases}x-p=p\\y-p=p\end{cases},\begin{cases}x-p=p^2\\y-p=1\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=p+1\\y=p+p^2\end{cases},\begin{cases}x=2p\\y=2p\end{cases},\begin{cases}x=p+p^2\\y=p+1\end{cases}$$

2.【一年廿四班　林暘曜　93 年 4 月 7 日 10 時 03 分投稿】

設半徑r $\angle P_2OP_6=\dfrac{360^\circ}{3}=120^\circ$　　$\angle P_2P_1P_6=\dfrac{360^\circ-120^\circ}{2}=120^\circ$

$\overline{P_2P_6}=\sqrt{3}r$

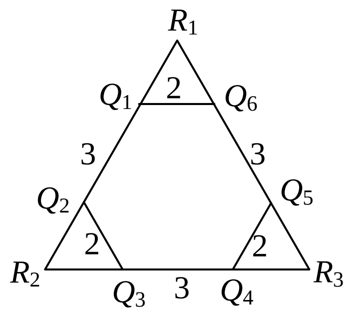
$(\sqrt{3}r)^2=2^2+3^2-2\cdot2\cdot3\cos120^\circ\quad\Rightarrow\quad r^2=\dfrac{19}{3}$

六邊形$P_1P_2P_3P_4P_5P_6$面積=$3(\triangle P_1P_2O+\triangle P_1P_6O)=3(\triangle P_1P_2P_6+\triangle P_2OP_6)=3(\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot3\sin120^\circ+\dfrac{1}{2}\cdot r^2\sin120^\circ)=\dfrac{37}{4}\sqrt{3}$

【二年十班　張孔傳　2005 年 4 月 7 日 13 時 35 分投稿】

因為六邊形$P_1P_2P_3P_4P_5P_6$是內接圓，所以相同邊長所對的圓心角相等，所對應的等腰三角形$\triangle OP_kP_{k+1}$也相等，因此將六邊形的邊長重新排列成$\overline{Q_1Q_2}=\overline{Q_3Q_4}=\overline{Q_5Q_6}=3$、$\overline{Q_2Q_3}=\overline{Q_4Q_5}=\overline{Q_6Q_1}=2$，則

六邊形$P_1P_2P_3P_4P_5P_6$面積=六邊形$Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5Q_6$面積



延長$\overleftrightarrow{Q_1Q_2}$, $\overleftrightarrow{Q_3Q_4}$, $\overleftrightarrow{Q_5Q_6}$

$\because\angle Q_6Q_1Q_2=\angle Q_1Q_6Q_5\Rightarrow\angle R_1Q_1Q_6=\angle R_1Q_6Q_1$

同理$\angle R_2Q_2Q_3=\angle R_2Q_3Q_2$, $\angle R_3Q_4Q_5=\angle R_3Q_5Q_4$

$\angle Q_6Q_1Q_2+\angle Q_1Q_2Q_3+\angle Q_2Q_3Q_4+\angle Q_3Q_4Q_5+\angle Q_4Q_5Q_6+\angle Q_5Q_6Q_1=180^\circ\times(6-2)=720^\circ$

$\Rightarrow\angle Q_6Q_1Q_2=\dfrac{720^\circ}{6}=120^\circ\Rightarrow\angle R_1Q_1Q_6=\angle R_1Q_6Q_1=60^\circ$

$\therefore\triangle R_1Q_1Q_6$為正$\triangle\Rightarrow\triangle R_2Q_2Q_3$、$\triangle R_3Q_4Q_5$為正$\triangle\Rightarrow\triangle R_1R_2R_3$為正$\triangle$

所求面積=$7^2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}-3\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot2^2=\dfrac{37\sqrt{3}}{4}$

3. (1)$\because$ x、y、$z\in(0,1)$　　$\therefore 1-x$、$1-y$、$1-z\in(0,1)$　　$\Rightarrow$　$a=xy+yz+zx-2xyz=xy+yz(1-x)+zx(1-y)>0$

當 x、$y\to0$，$z\to1$ 時，$a\to0$

(2)$a=(1-x)x+(1-2x)yz$

①當$0<x\le\dfrac{1}{2}$時，$1-2x\ge0$

因為 $yz\le(\dfrac{y+z}{2})^2=(\dfrac{1-x}{2})^2$，所以，$a\le(1-x)x+\dfrac{1}{4}(1-2x)(1-x)^2=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}x^2(1-2x)\le\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}(\dfrac{x+x+1-2x}{3})^3=\dfrac{7}{27}$

②當$\dfrac{1}{2}\le x<1$時，$1-2x<0$，因為 $yz>0$，所以$(1-2x)yz<0$，

$\therefore a<(1-x)x\le\dfrac{1}{4}$

綜上所述，得$a\in(0,\dfrac{7}{27}]$

4.若方程式有一實根x_0 ($x_0 \neq 0$)，代入方程式可得 $(x_0+\frac{1}{x_0})a+b+(x_0{}^2+\frac{1}{x_0{}^2})=0$

視a、b爲變量，問題轉化爲：

直線 $(x_0+\frac{1}{x_0})a+b+(x_0{}^2+\frac{1}{x_0{}^2})=0$ 與圓面 $a^2+b^2\le\frac{4}{5}$ 是否有公共點？

由點到直線的距離公式得，圓心(0,0)到直線的距離 $d=\dfrac{x_0{}^2+\frac{1}{x_0{}^2}}{\sqrt{(x_0+\frac{1}{x_0})^2+1}}=\sqrt{x_0{}^2+\frac{1}{x_0{}^2}+3}-\dfrac{3}{\sqrt{x_0{}^2+\frac{1}{x_0{}^2}+3}}$

又 $x_0{}^2+\frac{1}{x_0{}^2}\ge 2$， $f(t)=\sqrt{t+3}-\frac{3}{\sqrt{t+3}}$ 在 $[2,+\infty)$ 上是增函數，所以 $d\ge\sqrt{5}-\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$

因此，當d恰爲$\frac{2}{\sqrt{5}}$時，方程式有實根，此時 $x_0{}^2+\frac{1}{x_0{}^2}=2$ ， $x_0=\pm 1$

代入方程式得 $\begin{cases}2a+b+2=0\\ a^2+b^2=\frac{4}{5}\end{cases}$ or $\begin{cases}-2a+b+2=0\\ a^2+b^2=\frac{4}{5}\end{cases}$

解得 $a=-\frac{4}{5},b=-\frac{2}{5}$ 時原方程式的實根爲 1

或 $a=\frac{4}{5},b=-\frac{2}{5}$ 時原方程式的實根爲−1

此外，方程式無實數解。

5.① $\because 2\sqrt{S_n}=a_n+1$ $\quad\therefore 4S_n=(a_n+1)^2$ $\Rightarrow$ $4(S_n-S_{n-1})=(a_n+1)^2-(a_{n-1}+1)^2$ $\Rightarrow$ $(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-2)=0$

$\because a_n+a_{n-1}>0$ $\quad\therefore a_n-a_{n-1}=2$

又$a_1=S_1=1$ $\quad\therefore a_2=a_1+2=3$ 故$\{a_n\}$是公差爲 2 的等差數列。

$\therefore a_n=2n-1$

$\therefore b_n=(2n-1)^2+2(2n-1)+3=4n^2+2$

② $M=(a_m-b_n)^2+(m-n)^2$ 表示拋物線 $y=4x^2+2$ 上的點(n , b_n)與直線 $y=2x-1$ 上的點(m , a_m)距離的平方

③拋物線 $y=4x^2+2$ 上的點$(x_0 , 4x_0{}^2+2)$ $(x_0\ge 1)$到直線 $y=2x-1$ 的距離

$$d=\frac{|2x_0-4(x_0{}^2+2)-1|}{\sqrt{5}}=\frac{(2x_0-\frac{1}{2})^2+\frac{11}{4}}{\sqrt{5}}\ge\frac{(2\times 1-\frac{1}{2})^2+\frac{11}{4}}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

當$x_0=1$ 時， $d_{\min}=\sqrt{5}$

④所以當$n=1$ 時，$b_n=b_1=6$ 且$m=3$ 時，$a_m=a_3=5$， $M_{\min}=d_{\min}{}^2=5$