

國立台中一中合作盃數學金頭腦

第卅一次有獎徵答

收稿時間：94年4月6日~94年4月8日 16:00

- 說明：(1)解答請寫在答案稿紙上，並務必註明「交件時間」、「班級」、「姓名」。
- (2)稿件寫完請投入敬業樓一樓數學科辦公室外銀色的有獎徵答收稿信箱內。
- (3)答案稿紙可至數學科辦公室索取，一張答案稿紙只能寫一個题目的解答，如欲投稿兩題以上，請分別寫在不同的答案稿紙，否則不予評閱。
- (4)答案稿紙上須註明投稿時間，投稿前須請數學科任一位老師在投稿時間上簽證，否則視為當日最晚時間繳交。

1. 已知 $f(x) = \frac{px}{x-p}$ ， p 為質數，求證： $f(x)$ 的圖形在第一象限有三個格子點。
2. 設 $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ 依序為圓上六點，已知 $\overline{P_1P_2} = \overline{P_2P_3} = \overline{P_3P_4} = 3$ 、 $\overline{P_4P_5} = \overline{P_5P_6} = \overline{P_6P_1} = 2$ ，求此六邊形 $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ 之面積？
3. 已知 x, y, z 為正實數，且 $x+y+z=1$ ，若 $\frac{a}{xyz} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - 2$ ，求實數 a 的範圍？
4. 設實數 a, b 滿足 $a^2 + b^2 \leq \frac{4}{5}$ ，試根據 a, b 之值討論 x 的方程式 $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ 是否有實數解。
5. 設正數列 $\{a_n\}$ 的前 n 項的和為 S_n ，且 $2\sqrt{S_n} = a_n + 1$ ；設 $b_n = a_n^2 + 2a_n + 3$ ，其中 n 為正整數，試求 $M = a_m^2 + b_n^2 + m^2 + n^2 - 2(a_m b_n + mn)$ 的最小值，其中 m, n 為正整數。