合作盃數學金頭腦第卅次有獎徵答解答

1.【一年四班　施文龍　93 年 12 月 28 日 7 時 40 分投稿】

令 $y=x^2-2 \quad \Rightarrow \quad y+2=x^2$

$x(y+2)^2+y+2+1=0$

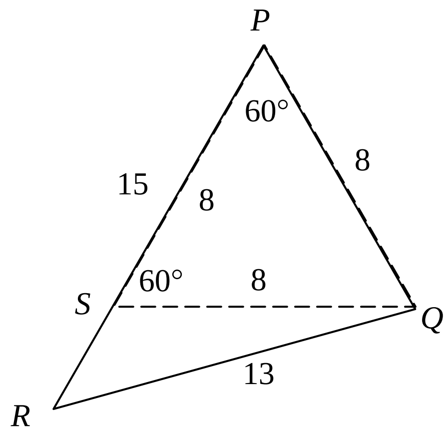
$x(y^2+4y+4)=-y-3$

$x^2(y^4+8y^3+24y^2+32y+16)=y^2+6y+9$

$\Rightarrow y^5+10y^4+40y^3+79y^2+74y+23=0$ (用 $x^2=y+2$)代入)

$\therefore q(r_1)q(r_2)q(r_3)q(r_4)q(r_5)=-23$

3.【二年廿三班　劉孝威　93 年 12 月 29 日 10 時 3 分投稿】



$\because \cos\angle RPQ=\dfrac{15^2+8^2-13^2}{2\cdot 15\cdot 8}=\dfrac{1}{2} \quad \therefore \angle RPQ=60^\circ$

∴在 $\overline{RP}$ 上必可找到一點 S，使△PQS 爲正△

且每邊長 $\overline{SP}=\overline{SQ}=\overline{PQ}=8$ 爲整數，得證。

4.【二年十三班　黃　傑　93 年 12 月 27 日 11 時 10 分投稿】

排序不等式 $\begin{cases} a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n \\ b_1<b_2<b_3<\cdots<b_n \end{cases}$

$\Rightarrow a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n>a_1b_{j_1}+a_2b_{j_2}+\cdots+a_nb_{j_n}>a_1b_n+a_2b_n+\cdots+a_nb_n \qquad j\in\{1,2,3,\cdots,n\}$

<證明> ① 設亂序和中 $j_n\neq n$ 且含有 $a_kb_n \quad (k\neq n)$，則由 $(a_n-a_k)(b_n-b_{j_n})>0$

$\therefore a_nb_n+a_kb_{j_n}>a_nb_{j_n}+a_kb_n$ ......①

由此可知：$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n>a_1b_{j_1}+a_2b_{j_2}+\cdots+a_nb_{j_n}$

② 設亂序和中有 $a_kb_n \quad (k\neq n)$，則由 $(a_k-a_1)(b_n-b_{j_n})>0$

$\therefore a_1b_n+a_kb_{j_n}<a_1b_{j_n}+a_kb_n$ ......②

由此可知：$a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1>a_1b_{j_1}+a_2b_{j_2}+\cdots+a_nb_{j_n}$

故 $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3>a_1b_{j_1}+a_2b_{j_2}+a_3b_{j_3}>a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1$

故 C_{123} 最大；C_{321} 最小