

國立台中一中合作盃數學金頭腦

第卅次有獎徵答

收稿時間：93年12月27日~93年12月29日16:00

- 說明：(1)解答請寫在答案稿紙上，並務必註明「交件時間」、「班級」、「姓名」。
- (2)稿件寫完請投入敬業樓一樓數學科辦公室外銀色的有獎徵答收稿信箱內。
- (3)答案稿紙可至數學科辦公室索取，一張答案稿紙只能寫一個题目的解答，如欲投稿兩題以上，請分別寫在不同的答案稿紙，否則不予評閱。
- (4)答案稿紙上須註明投稿時間，投稿前須請數學科任一位老師在投稿時間上簽證，否則視為當日最晚時間繳交。

1. 多項式方程式 $x^5 + x^2 + 1 = 0$ 的 5 個根為 r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 。令 $q(x) = x^2 - 2$ ，求 $q(r_1)q(r_2)q(r_3)q(r_4)q(r_5)$ 的值。
2. 有無窮多組的正整數對 (m, n) 滿足方程式 $m + (m+1) + \dots + (n-1) + n = mn$ 。已知依 m 值由小到大排列的四組解為 $(1, 1), (3, 6), (15, 35), (85, 204)$ 。
 - (1) 請找出 n 的關係。
 - (2) 利用(1)，找出接下來的三組解。
3. 在 $\triangle PQR$ 中， $\overline{PQ} = 8$ ， $\overline{QR} = 13$ 且 $\overline{RP} = 15$ 。證明：在 \overline{RP} 上必可找到一個非端點的點 S ，使得 \overline{PS} 及 \overline{QS} 的長皆為整數。
4. 設 $a_1 > a_2 > a_3 > 0$ ， $b_1 > b_2 > b_3 > 0$ ， $C_{ijk} = a_i b_j + a_2 b_3 + a_3 b_1$ 。(足標 i, j, k 取 1, 2, 3 值，但互不相同，例如 $C_{231} = a_1 b_2 + a_2 b_3 + a_3 b_1$)，求 C_{ijk} 最大值與最小值者分別為何？
5. $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ， $n \in \mathbb{N}$ ，將 A 重排成一數列，滿足其中任相鄰 k 項 ($k \geq 2$) 之平均值均非整數，試求所有符合條件之數列。