合作盃數學金頭腦第廿九次有獎徵答解答

1.【一年廿二班　高魁良　93 年 10 月 25 日 13 時 00 分投稿】

$$x^{2004}+(2x-1)^{2004}=0 \quad\Rightarrow\quad (\frac{2x-1}{x})^{2004}=-1=\cos(2n-1)\pi+i\sin(2n-1)\pi$$

$$\Rightarrow \frac{2x-1}{x}=\cos\frac{(2n-1)\pi}{2004}+i\sin\frac{(2n-1)\pi}{2004}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}=2-(\cos\frac{(2n-1)\pi}{2004}+i\sin\frac{(2n-1)\pi}{2004})$$

$$\Rightarrow |\frac{1}{x}|=|2-(\cos\frac{(2n-1)\pi}{2004}+i\sin\frac{(2n-1)\pi}{2004})|=\sqrt{(2-\cos\frac{(2n-1)\pi}{2004})^2+(\sin\frac{(2n-1)\pi}{2004})^2}=\sqrt{4+1-4\cos\frac{(2n-1)\pi}{2004}}$$

$$\Rightarrow (\frac{1}{|x|})^2=5-4\cos\frac{(2n-1)\pi}{2004} \qquad ,(n=1\sim 1002)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{1002}\frac{1}{|x_i|^2}=5010-4(\sum_{i=1}^{1002}\cos\frac{(2n-1)\pi}{2004})=5010+8(\sum_{i=1}^{501}\cos\frac{(2n-1)\pi}{1002})=5010-16\cdot 0=5010$$

3.【一年八班　林稚軒　93 年 10 月 25 日 10 時 10 分投稿】

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1+y+\cdots+y^k)x^k=\frac{1}{y-1}\sum_{k=0}^{\infty}(y^{k+1}-1)x^k=\frac{y}{y-1}\sum_{k=0}^{\infty}(xy)^k-\frac{1}{y-1}\sum_{k=0}^{\infty}x^k=\frac{y}{y-1}\cdot\frac{1}{1-xy}-\frac{1}{y-1}\cdot\frac{1}{1-x}$$

$$=\frac{1}{y-1}\cdot\frac{y-1}{(1-xy)(1-x)}=\frac{1}{(1-xy)(1-x)}$$

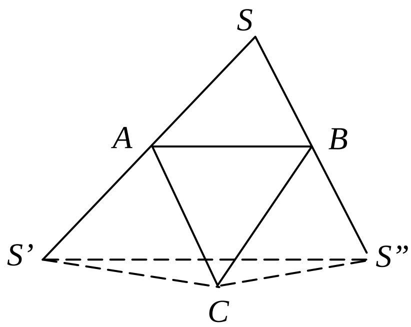
4.【二年廿六班　留啓原　93 年 10 月 25 日 12 時 10 分投稿】

(1)由題目知：*S–A–S'*共線且 *S–B–S"*共線

又 $\overline{SA}=\overline{AS'}\wedge\overline{SB}=\overline{BS''}\Rightarrow\overline{S'S''}=2\overline{AB}=2a$

又 $\overline{S'C}=\overline{CS''}=a$

$\triangle S'CS''$中 $\overline{S'C}+\overline{CS''}=\overline{S'S''}\Rightarrow C$ 位於 $\overline{S'S''}$ 上



(2)

特殊化：IF　$b=c$　$\Rightarrow$ 　　$\Rightarrow\overline{SC}\perp\overline{AB}$

一般化：Assume　$b<c$　$\Rightarrow$ 　　$\Rightarrow S$ 對 $\overline{AB}$ 之投影的移動量為 $x(\overline{SS'})$

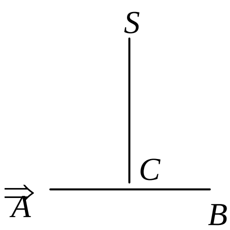


圖 1

C 對 $\overline{AB}$ 之投影的移動量為 $x(\overline{CC'})$

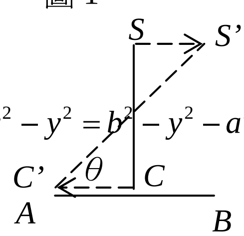
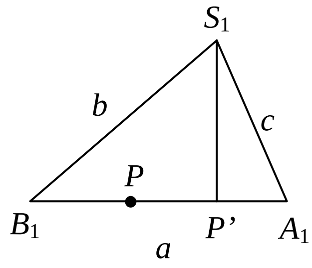


圖 2

(3)令 $\overline{B_1P'}=y$　$\overline{P'A_1}=a-y\Rightarrow c^2-y^2=b^2-y^2-a^2+2ay\Rightarrow y=\dfrac{c^2-b^2+a^2}{2a}$

$$x = y - \frac{a}{2} = \frac{c^2 - b^2 + a^2}{2a} - \frac{a^2}{2a} = \frac{c^2 - b^2}{2a}$$



由圖 2： $\cos\theta = \frac{2x}{a} = \frac{c^2 - b^2}{a^2}$

特殊化亦符合此解

5.【三年廿六班　彭冠銓　93 年 10 月 25 日 10 時 10 分投稿】

欲證 $R \ge 2r \Leftrightarrow \frac{abc}{4\triangle} \ge 2 \cdot \frac{\triangle}{s} \Leftrightarrow abc \ge 8 \cdot \frac{\triangle^2}{s} = 8(s-a)(s-b)(s-c)$　　$s = \frac{a+b+c}{2}$

$$a = (s-b) + (s-c) \ge 2\sqrt{(s-b)(s-c)}$$

$$b = (s-c) + (s-a) \ge 2\sqrt{(s-c)(s-a)}$$

$$\times)\quad c = (s-a) + (s-b) \ge 2\sqrt{(s-a)(s-b)}$$

$$abc = 8(s-a)(s-b)(s-c)$$